Eindimensionale Stochastische Differentialgleichungen Mit Verallgemeinerter Drift Bzgl. Stetiger Lokaler Martingale

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der
Fakultät für Mathematik und Informatik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Dipl.-Math. oec. Mario Walther,
geboren am 03.02.1974 in Jena

Gutachter

1. Prof. Dr. Hans-Jürgen Engelbert, Jena, Deutschland

2. Monsieur Rainer Buckdahn, Brest, Frankreich

Tag der letzten Prüfung des Rigorosums: 15.11.2007

Tag der öffentlichen Verteidigung: 20.12.2007

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und Symbole

$\emptyset$	leere Menge
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen; $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen; $\mathbb{R} :=] - \infty, +\infty[$
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen; $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[$
$\overline{\mathbb{R}}$	erweiterte Zahlengerade; $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (vgl. auch S. 35)
$\overline{\mathbb{R}}_+$	erweiterte positive Zahlengerade; $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (vgl. auch S. 35)
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}_+$	Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen; $\mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$
$C(\mathbb{R}_+, U)$	Raum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ mit Werten in einem metrischen Raum U
$C(\mathbb{R}_+)$	Raum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ mit Werten in $\mathbb{R}$
$\overline{C}(\mathbb{R}_+)$	Raum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$
$C_0(\mathbb{R}_+)$	Raum der stetigen Funktionen $\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)$ mit $\mathbf{w}(0) = 0$
E_+	Raum der monoton wachsenden Funktionen aus $C_0(\mathbb{R}_+)$
D	Raum der $\overline{\mathbb{R}}$-wertigen rechtsstetigen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ mit linksseitigem Grenzwert
D_+	Raum der monoton wachsenden und rechtsstetigen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}_+$
$\mathfrak{B}(U)$	σ-Algebra der Borelschen Mengen des metrischen Raumes U
$\sigma(\mathcal{E})$	die von dem Mengensystem $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra
$\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$	die von den beiden Mengensystemen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ erzeugte σ-Algebra; $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} := \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$
$\mathcal{F}^{\mathbf{P}}, \bar{\mathcal{F}}^{\mathbf{P}}$	siehe S. 12
$\mathcal{P}(\mathbb{F})$	σ-Algebra der $\mathbb{F}$-vorhersagbaren Mengen; siehe S. 13
$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$	Produkt-σ-Algebra der σ-Algebren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$
$\mathcal{F}_\infty$	$\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ für eine wachsende Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ von σ-Algebren
$\mathbb{F}_+$, $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}}$	rechtsstetige Filtration bzw. augmentierte und rechtsstetige Filtration; siehe S. 12
$\mathbb{F} \circ \mathbf{T}$	zeittransformierte Filtration; siehe S. 25
$\mathbb{D} := (\mathcal{D}_t)_{t \geq 0}$	siehe S. 35
$\mathcal{N}_0^{\mathbf{P}}$, $\mathcal{N}^{\mathbf{P}}$	siehe S. 11 bzw. S. 12

$\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\xi)$	Erwartungswert der Zufallsgröße ξ bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}$
$\mu \otimes \nu$	Produktmaß zweier σ-endlicher Maße μ und ν
δ_x	Dirac-Maß im Punkt x
ℓ	Lebesgue-Maß auf dem Borelschen Meßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$
$\mathbb{W}$	Wiener-Maß auf dem Borelschen Meßraum $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$
φ, $\bar{\varphi}$	siehe S. 36 bzw. S. 37
$[\![S,T]\!]$	$\{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : S(\omega) \leq t \leq T(\omega)\}$
$[\![S,T[\![$	$\{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : S(\omega) \leq t < T(\omega)\}$
X_{t-}	$\lim\limits_{s \uparrow t} X_s$; linksseitiger Grenzwert des càdlàg Prozesses $\mathbf{X}$ in $t > 0$
${}^0\mathbf{X}$	siehe S. 13
$\mathbf{X}^T$	der in T gestoppte Prozeß $\mathbf{X}$; $X_t^T = X_{t \wedge T}$ $(t \geq 0)$
$\mathbf{X} \circ \mathbf{T}$	zeittransformierter Prozeß; siehe S. 25
$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$	quadratischer Kovariationsprozeß der beiden stetigen Semimartingale $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$
$\langle \mathbf{X} \rangle$	quadratischer Variationsprozeß des stetigen Semimartingals $\mathbf{X}$
$\mathcal{L}^1(\mathbf{P})$	Menge aller $\mathbf{P}$-integrierbaren Zufallsgrößen
$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{F})$	siehe S. 18, falls $\mathbf{X}$ ein Prozeß von lokal beschränkter Variation
	siehe S. 18, falls $\mathbf{X}$ ein stetiges lokales Martingal
	siehe S. 20, falls $\mathbf{X}$ ein stetiges Semimartingal
$\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$	siehe S. 28
$\mathcal{M}_{loc}^p(C(\mathbb{R}_+))$	siehe S. 59
$\mathcal{M}_{loc}^{0,p}(C(\mathbb{R}_+))$	siehe S. 59
$\mathcal{M}_{loc}^{a,p}(C(\mathbb{R}_+))$	siehe S. 61
$\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$	siehe S. 123
$\tau_B^{\mathbf{X}}$	erste Eintrittszeit des Prozesses $\mathbf{X}$ in eine Menge $B \in \mathfrak{B}(U)$; siehe S. 13
$S_n^{\mathbf{X}}$, $S_\infty^{\mathbf{X}}$	siehe S. 64; letzteres bezeichnet die Explosionszeit des stochastischen Prozesses $\mathbf{X}$
E_b	siehe S. 74
N_b	siehe S. 77
A^c	Komplement der Menge A
I_A	charakteristische Funktion der Menge A
$A \times B$	kartesisches Produkt zweier Mengen A und B
$a \wedge b$	Mininum der beiden Zahlen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$
$a \vee b$	Maximum der beiden Zahlen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$
f. a.	fast alle
f. s.	fast sicher
$\square$	Beweisende
$:=$	„ist definiert als“

Kapitel 1

Einleitung

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit ist gerichtet auf die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eindimensionaler stochastischer Differentialgleichungen mit verallgemeinerter Drift vom Typ

$$X_t = X_0 + \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(a,t)\,\nu(\mathrm{d}a) + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s\,. \tag{1.0.1}$$

Hierbei bezeichnen $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal, b eine reelle Borel-meßbare Funktion auf $\mathbb{R}$, $L^{\mathbf{X}}$ die lokale Zeit des stetigen Semimartingals $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ und ν ein lokal-endliches signiertes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Die Größe X_0 spielt hierbei die Rolle der Anfangsbedingung und ist im allgemeinen in Form einer Startverteilung gegeben.

Diese stochastische Differentialgleichung enthält als Spezialfall die Gleichung ohne Drift ($\nu \equiv 0$) sowie die Gleichung mit gewöhnlicher Drift

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s\,, \tag{1.0.2}$$

wobei a eine weitere reelle Borel-meßbare Funktion auf $\mathbb{R}$ ist und $\langle \mathbf{M}\rangle = (\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ den quadratischen Variationsprozeß des treibenden Prozesses $\mathbf{M}$ bezeichnet. Darüber hinaus ist die betrachtete Gleichung (1.0.1) eine Verallgemeinerung der stochastischen Differentialgleichung mit einer Brownschen Bewegung als treibenden Prozeß.

Im Falle der Brownschen Bewegung als treibenden Prozeß wurden die Gleichungen (1.0.1) bzw. (1.0.2) eingehend von Engelbert und Schmidt (vgl. [17] - [20]) untersucht. In ihrer grundlegenden Arbeit formulierten sie für beliebige Startverteilungen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der stochastischen Differentialgleichung (1.0.1) bzgl. einer Brownschen Bewegung. Diese Bedingungen sind rein analytischer Natur und bezogen sich im Falle von Gleichung (1.0.1), abgesehen von wenigen restriktiven Voraussetzungen an die Mengenfunktion ν, nur auf den Diffusionskoeffizienten b und sind frei von Glattheitsforderungen an b. Daraus wurden dann hinreichende Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von Gleichung (1.0.2) abgeleitet.

Ziel dieser Arbeit ist es zu untersuchen, ob man ähnliche Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Gleichung (1.0.1) bzgl. stetiger lokaler Martingale als treibenden Prozeß formulieren kann und was man im Falle von Gleichung

(1.0.2) dann schließen kann. Mit dieser Fragestellung haben sich bereits einige Autoren beschäftigt (vgl. z. B. [12], [36], [37], [38]). Deren Ergebnisse sind nur zum Teil befriedigend und bezogen sich im wesentlichen auf die Existenz von Lösungen, wobei die Frage der Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (1.0.2) größtenteils außer acht gelassen wurde. Lediglich Rozkosz und Słomiński behandelten in einer ihrer Arbeiten (vgl. [37]) die Frage der Eindeutigkeit, aber unter recht restriktiven Voraussetzungen, wobei sie Gleichungen ohne Drift betrachteten.

Um Gleichung (1.0.1) für ein beliebiges stetiges lokales Martingal als treibenden Prozeß untersuchen zu können, ist es zunächst notwendig, einen vernünftigen Lösungsbegriff zu definieren. Hinsichtlich der Brownschen Bewegung ist der Begriff einer Lösung stochastischer Differentialgleichungen wohlbekannt. Da die Brownsche Bewegung durch ihre Verteilung auf dem Raum der stetigen Funktionen vollständig charakterisiert wird, wählen wir für unsere Begriffsbestimmung einer Lösung von Gleichung (1.0.1) einen analogen Zugang, indem wir uns die Verteilung eines stetigen lokalen Martingals vorgeben.

In einem ersten Schritt ist es daher erforderlich, die Verteilungen stetiger lokaler Martingale eingehender zu untersuchen. Dabei wird uns die Technik der Zeittransformation von großem Nutzen sein. Um das nötige Werkzeug hierfür und für die ganze Arbeit bereitzustellen, sollen zunächst im Kapitel 1 einige wesentliche Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und der stochastischen Analysis zusammengetragen werden.

Im Kapitel 2 wollen wir uns dann näher mit dem treibenden Prozeß $\mathbf{M}$ bzw. mit der Verteilung stetiger lokaler Martingale beschäftigen. Hierzu wird ein Resultat von Dambis, Dubins und Schwarz eine wichtige Rolle spielen. Dieses besagt nämlich, daß man jedes stetige lokale Martingal durch geeignete Zeittransformation aus einer Brownschen Bewegung gewinnen kann. Damit ist es dann möglich, die Verteilung stetiger lokaler Martingale durch bereits bekannte und einfache Verteilungen zu beschreiben. Dabei werden gewisse Markov-Kerne eine wichtige Rolle zur Beschreibung der Verteilung stetiger lokaler Martingale spielen. Diese Charakterisierung, die losgelöst von der eigentlichen Behandlung der stochastischen Differentialgleichung (1.0.1) ist, wird dann in den nachfolgenden Kapiteln dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen.

Wir werden insbesondere sehen, wie man aus einer gegebenen Brownschen Bewegung ein stetiges lokales Martingal konstruieren kann, welches eine vorgegebene Verteilung besitzt. Diese Konstruktion ist dann wesentlich, um für beliebige Startverteilungen notwendige und insbesondere hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Lösung von Gleichung (1.0.1) zu formulieren, womit wir uns im Kapitel 3 dieser Arbeit beschäftigen wollen. Bemerkenswert hierbei ist, daß, ohne weitere Voraussetzungen an den treibenden Prozeß, wir dieselben Existenzbedingungen erhalten, wie sie bereits Engelbert und Schmidt im Fall der Brownschen Bewegung als treibenden Prozeß formulierten.

Kapitel 4 widmet sich dann der Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (1.0.1) bzgl. stetiger lokaler Martingale. Dabei unterscheiden wir zwei Eindeutigkeitsbegriffe. Zum einen den Begriff der Eindeutigkeit in Verteilung und zum anderen den Begriff der pfadweisen Eindeutigkeit. Wie im Falle der Brownschen Bewegung als treibenden Prozeß erhalten wir für die Eindeutigkeit in Verteilung von Lösungen von Gleichung (1.0.1) bzgl. eines stetigen lokalen Martingals dieselben Eindeutigkeitsbedingungen. Dabei sei vorab schon angemerkt, daß die Klasse der stetigen lokalen Martingale für die Behandlung der Frage der Eindeutigkeit einzuschränken ist. Wie ein Beispiel von Engelbert zeigt (vgl. [12]), muß unter den bekannten Bedingungen Eindeutigkeit in Verteilung von Lösungen von Gleichung (1.0.1) für ein beliebiges stetiges lokales Martingal als treibenden Prozeß nicht immer vorliegen. Darüber hinaus werden wir uns in diesem Kapitel mit der Existenz starker Lösungen und der pfadweisen Eindeutigkeit von Lösungen von Gleichung (1.0.1) beschäftigen. Der abschließende Abschnitt dieses Kapitels widmet sich dann der Behandlung von Gleichung (1.0.2).

Ich danke Herrn Prof. Dr. Engelbert für die Anregung zu diesem Dissertationsthema, vor allem für seine engagierte Unterstützung und für die fruchtbaren Diskussionen, die wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Darüber hinaus möchte ich dem EU-Projekt „Evolution Equations for Deterministic and Stochastic Systems“ für die ideelle und finanzielle Förderung meinen Dank aussprechen.

Kapitel 2

Grundlagen

In den folgenden Ausführungen wollen wir einige wichtige Begriffe und für die Arbeit relevante Sachverhalte bereitstellen. Da dies nur überblicksartig erfolgen kann, verweisen wir für die nicht explizit erläuterten Begriffe auf [2], [5], [10], [25], [29], [35] sowie [40].

Abschnitt 2.1 dient im wesentlichen dazu, einen Überblick über häufig verwendete Notationen zu geben. In den beiden darauffolgenden Abschnitten 2.2 und 2.3 wollen wir auf zwei für diese Arbeit wesentliche Klassen stochastischer Prozesse eingehen. Hierbei handelt es sich um die sogenannten stetigen lokalen Martingale und stetigen Semimartingale. Dabei wollen wir grundlegende Aussagen hinsichtlich dieser Prozeßklassen zusammentragen und das stochastische Integral definieren. Der letzte Abschnitt 2.4 widmet sich dann einer kurzen Darstellung zufälliger Zeittransformationen.

2.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Mit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ wollen wir stets einen Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnen, welcher als Modell für ein zufälliges Experiment dient. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ heißt *vollständig*, falls jede Teilmenge einer $\mathbf{P}$-Nullmenge aus $\mathcal{F}$ zu $\mathcal{F}$ gehört und damit selbst eine $\mathbf{P}$-Nullmenge ist. Mit $\mathcal{N}_0^{\mathbf{P}}$ bezeichnen wir die Menge der $\mathbf{P}$-Nullmengen aus $\mathcal{F}$.

Mit U sei im folgenden stets ein *polnischer Raum* bezeichnet, d. h., U ist ein topologischer Raum, und es existiert eine die Topologie von U induzierende Metrik d, so daß U zusammen mit der Metrik d zu einem separablen und vollständigen metrischen Raum wird. Die vom System der offenen Teilmengen von U erzeugte σ-Algebra kennzeichnen wir mit $\mathfrak{B}(U)$. Man nennt die Elemente aus $\mathfrak{B}(U)$ auch *Borelsche Mengen von U* und das Paar $(U, \mathfrak{B}(U))$ *Borelscher Meßraum*. $\mathfrak{B}(U)$ selbst bezeichnet man auch als *σ-Algebra der Borelschen Mengen von U*.

Ist $X : \Omega \to U$ eine *Zufallsvariable (über Ω)*, also eine $\mathcal{F}$-$\mathfrak{B}(U)$-meßbare Abbildung, so induziert X vermöge der Definition

$$\mathbf{P}_X(B) := \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) \in B\}) \quad (B \in \mathfrak{B}(U))$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}_X$ auf dem Borelschen Meßraum $(U, \mathfrak{B}(U))$. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß wird als *Verteilung von X bezüglich* $\mathbf{P}$ bezeichnet. Man nennt eine $\mathcal{F}$-$\mathfrak{B}(U)$-meßbare Abbildung $X : \Omega \to U$ kurzum *$\mathcal{F}$-meßbar* und im Fall $U = \overline{\mathbb{R}}$ auch *Zufallsgröße (über Ω)*.

Unter der Voraussetzung der Existenz, also der $\mathbf{P}$-Integrierbarkeit der Zufallsgrößen $X \vee 0$ oder $-(X \wedge 0)$, bezeichnet

$$\mathbb{E}(X) := \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(X) := \int\limits_{\Omega} X(\omega)\, \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega)$$

den *Erwartungswert* der Zufallsgröße X bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}$. Ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra über Ω, so bezeichnet $\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(X \,|\, \mathcal{G})$ eine Version des *bedingten Erwartungswertes* der nichtnegativen oder $\mathbf{P}$-integrierbaren Zufallsgröße X unter der Bedingung $\mathcal{G}$ bezüglich $\mathbf{P}$. Mit anderen Worten ist $\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(X \,|\, \mathcal{G})$ die $\mathbf{P}$-f. s. eindeutig bestimmte $\mathcal{G}$-meßbare Zufallsgröße, so daß für jedes $G \in \mathcal{G}$ gilt

$$\int\limits_{G} \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(X \,|\, \mathcal{G})(\omega)\ \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) = \int\limits_{G} X(\omega)\ \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega)\,.$$

Für eine Menge $A \in \mathcal{F}$ definiert man die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von A unter der Bedingung $\mathcal{G}$ als $\mathbf{P}(A \,|\, \mathcal{G}) := \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_A \,|\, \mathcal{G})$. Um Verwechslungen zu vermeiden, bezeichnen wir den Erwartungswert bzgl. $\mathbf{P}$ stets mit $\mathbb{E}$, anderenfalls indizieren wir $\mathbb{E}$ mit dem entsprechenden Wahrscheinlichkeitsmaß, bzgl. dessen der Erwartungswert gebildet werden soll.

Eine *Filtration* (*in* $\mathcal{F}$) ist eine Familie $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ von σ-Algebren über Ω mit $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ für $0 \leq s < t$. Ist $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, so definieren wir für $t \geq 0$ die folgenden σ-Algebren $\mathcal{F}_{t+}$ über Ω durch

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}\,.$$

Dies liefert uns eine neue Filtration $\mathbb{F}_+ := (\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$, welche rechtsstetig ist und für die $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+}$ für $t \geq 0$ gilt. Dabei heißt eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *rechtsstetig,* falls $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ für jedes $t \geq 0$ gilt.

Eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ heißt *vollständig,* falls der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vollständig ist und $\mathcal{N}_0^{\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}_0$ gilt. Ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra über Ω, so setzen wir

$$\mathcal{G}^{\mathbf{P}} = \mathcal{G} \vee \mathcal{N}_0^{\mathbf{P}} \quad \text{und} \quad \bar{\mathcal{G}}^{\mathbf{P}} = \mathcal{G} \vee \mathcal{N}^{\mathbf{P}}, \tag{2.1.1}$$

wobei $\mathcal{N}^{\mathbf{P}} := \{A \subseteq N \,:\, N \in \mathcal{N}_0^{\mathbf{P}}\}$ und wir vereinbarungsgemäß $\mathbf{P}(A) = 0$ für $A \in \mathcal{N}^{\mathbf{P}}$ setzen. Damit definieren wir die *augmentierte* Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{P}} := (\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}})_{t\geq 0}$. Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, so ist die augmentierte Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$ eine vollständige Filtration in $\mathcal{F}$, und es gilt $\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}} = \bar{\mathcal{F}}_t^{\mathbf{P}}$ für $t \geq 0$. Weiterhin vereinbaren wir die Schreibweise $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} := (\mathbb{F}^{\mathbf{P}})_+$.

Für die Modellierung von sich zeitlich ändernden zufälligen Vorgängen bedient man sich in der Stochastik des Begriffes des *zufälligen* oder *stochastischen Prozesses.* Unter einem *U-wertigen stochastischen Prozeß (über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$) versteht man hierbei eine Familie $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ von $\mathcal{F}$-$\mathfrak{B}(U)$-meßbaren Abbildungen $X_t : \Omega \to U$ für $t \geq 0$. In diesem Fall heißt der Borelsche Meßraum $(U, \mathfrak{B}(U))$ (oder kurz U) *Zustandsraum* des Prozesses $\mathbf{X}$. Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt $\mathbf{X}(\omega)$, also die auf $\mathbb{R}_+$ definierte Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$, *Trajektorie* bzw. *Pfad* des Prozesses $\mathbf{X}$. Im Fall $U = \overline{\mathbb{R}}$ nennen wir den Prozeß $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ kurzum *stochastischen Prozeß*, und im Fall $U = \mathbb{R}$ heißt der Prozeß $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ *reeller stochastischer Prozeß.* Ist X_0 reellwertig, so bezeichnet

${}^0\mathbf{X} = ({}^0X_t)_{t\geq 0}$ mit ${}^0X_t := X_t - X_0$ für $t \geq 0$ den in den Nullpunkt verschobenen stochastischen Prozeß $\mathbf{X}$.

Ist $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ ein weiterer U-wertiger stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, so heißen die beiden Prozesse $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{X}$ *ununterscheidbar,* falls $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ $\mathbf{P}$-f. s. bzw. $\mathbf{P}(\{Y_t = X_t,\, t \geq 0\}) = 1$ gilt. Gilt dagegen nur $\mathbf{P}(\{Y_t = X_t\}) = 1$ für jedes $t \geq 0$, so nennt man $\mathbf{Y}$ eine *Modifikation* von $\mathbf{X}$. Ist $\mathbf{Y}$ eine Modifikation von $\mathbf{X}$ und besitzen beide Prozesse $\mathbf{P}$-f. s. rechtsstetige Trajektorien, dann sind $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{X}$ ununterscheidbar.

Im folgenden seien $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration in $\mathcal{F}$ und $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein U-wertiger stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Der Prozeß $\mathbf{X}$ heißt an die Filtration $\mathbb{F}$ *adaptiert* bzw. $\mathbb{F}$-*adaptiert,* falls X_t eine $\mathcal{F}_t$-$\mathfrak{B}(U)$-meßbare Abbildung für jedes $t \geq 0$ ist. Mit $\mathbb{F}^{\mathbf{X}} := (\mathcal{F}_t^{\mathbf{X}})_{t\geq 0}$ bezeichnen wir die kleinste Filtration in $\mathcal{F}$, bezüglich welcher der Prozeß $\mathbf{X}$ adaptiert ist. Genauer heißt dies:

$$\mathcal{F}_t^{\mathbf{X}} := \sigma(\{X_s, 0 \leq s \leq t\}) \quad \text{für} \quad t \geq 0\,,$$

und man nennt $\mathbb{F}^{\mathbf{X}}$ die *kanonische Filtration des Prozesses* $\mathbf{X}$. Die σ-Algebren $\mathcal{F}_{t+}^{\mathbf{X}}$ und $\mathcal{F}_t^{\mathbf{X},\mathbf{P}} := (\mathcal{F}_t^{\mathbf{X}})^{\mathbf{P}}$ bzw. die Filtrationen $\mathbb{F}_+^{\mathbf{X}}$ und $\mathbb{F}^{\mathbf{X},\mathbf{P}} := (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{P}}$ werden analog wie oben definiert, aber bzgl. $\mathcal{F}_t^{\mathbf{X}}$ bzw. $\mathbb{F}^{\mathbf{X}}$.

Neben der $\mathbb{F}$-Adaptiertheit eines U-wertigen stochastischen Prozesses $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ sind auch die Meßbarkeit, die progressive Meßbarkeit sowie die Vorhersagbarkeit dieses von Interesse. Der Prozeß $\mathbf{X}$ heißt *meßbar,* falls die auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$ definierte Abbildung $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$-$\mathfrak{B}(U)$-meßbar ist. Der Prozeß $\mathbf{X}$ heißt dagegen $\mathbb{F}$-*progressiv meßbar,* falls für jedes $t \geq 0$ die auf $\Omega \times [0, t]$ restringierte Abbildung $(\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$ eine $\mathcal{F}_t \otimes \mathfrak{B}([0, t])$-$\mathfrak{B}(U)$-meßbare Abbildung ist. Sind die Trajektorien des Prozesses $\mathbf{X}$ rechtsstetig und ist dieser $\mathbb{F}$-adaptiert, so ist $\mathbf{X}$ auch $\mathbb{F}$-progressiv meßbar. Umgekehrt ist jeder $\mathbb{F}$-progressiv meßbare Prozeß ein $\mathbb{F}$-adaptierter sowie meßbarer Prozeß.

Für den Begriff der Vorhersagbarkeit bezeichnet zunächst $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ die σ-Algebra über $\Omega \times \mathbb{R}_+$, die von allen $\mathbb{F}$-adaptierten stochastischen Prozessen über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit stetigen Trajektorien erzeugt wird. Ein stochastischer Prozeß $\mathbf{X}$ heißt dann $\mathbb{F}$-*vorhersagbar,* falls die auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$ definierte Abbildung $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ eine $\mathcal{P}(\mathbb{F})$-meßbare Abbildung ist. Jeder $\mathbb{F}$-vorhersagbare Prozeß ist dann insbesondere $\mathbb{F}$-progressiv meßbar.

Ein weiteres wichtiges Werkzeug in der Theorie stochastischer Prozesse sind die sogenannten Stoppzeiten, die zur Modellierung von Ereignissen dienen, welche zu einem zufälligen Zeitpunkt eintreten können. Eine *zufällige Zeit* τ ist eine Zufallsgröße über Ω mit Werten in $[0, +\infty]$. Sie heißt $\mathbb{F}$-*Stoppzeit*, falls gilt

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{für alle} \quad t \geq 0\,.$$

Viele Autoren differenzieren zwischen Stoppzeit und strenger Stoppzeit. Diese Unterscheidung bezieht sich im wesentlichen auf die gewählte Filtration, bezüglich welcher τ eine Stoppzeit sein soll. Da wir in unserer Definition die Filtration explizit mit angeben, erübrigt sich somit diese Unterscheidung.

Wichtige und auch für die Arbeit interessante Beispiele von Stoppzeiten sind die *Eintrittszeiten* eines U-wertigen stochastischen Prozesses $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ in eine Borelsche Menge von U. Die Eintrittszeit τ_B von $\mathbf{X}$ in eine Borelsche Menge $B \in \mathfrak{B}(U)$ ist für $\omega \in \Omega$ definiert als

$$\tau_B^{\mathbf{X}}(\omega) = \inf\{\, s \geq 0 \,:\, X_s(\omega) \in B\}\,, \tag{2.1.2}$$

wobei wir vereinbarungsgemäß stets $\inf(\emptyset) = +\infty$ setzen. Im allgemeinen ist die Eintrittszeit eines Prozesses in eine beliebige Borelsche Menge von U nicht immer eine Stoppzeit. Vielmehr gilt die folgende Aussage:

Satz 2.1.3 *Sei $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein U-wertiger stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und bezeichne τ_B die Eintrittszeit von $\mathbf{X}$ in eine Menge $B \in \mathfrak{B}(U)$ i. S. v.* (2.1.2). *Dann ist*

(a) $\tau_B^{\mathbf{X}}$ *eine* $\mathbb{F}^{\mathbf{X}}$*-Stoppzeit, falls B abgeschlossen ist und die Trajektorien des Prozesses $\mathbf{X}$ stetig sind.*

(b) $\tau_B^{\mathbf{X}}$ *eine* $\mathbb{F}_+^{\mathbf{X}}$*-Stoppzeit, falls B offen ist und die Trajektorien des Prozesses $\mathbf{X}$ rechtsstetig sind.*

Beweis: Für einen Beweis dieses Satzes vergleiche man Satz 49.4 sowie Satz 49.5 in [2]. □

Man sagt, eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit τ ist eine *vorhersagbare $\mathbb{F}$-Stoppzeit,* falls das stochastische Intervall $[\![0,\tau[\![$ zu $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ gehört. Beispielsweise ist die Stoppzeit aus Satz 2.1.3 (a) eine vorhersagbare $\mathbb{F}_+^{\mathbf{X}}$-Stoppzeit. (vgl. Proposition 2.3.5 in [40]). Darüber hinaus haben wir folgende Charakterisierung vorhersagbarer Stoppzeiten.

Satz 2.1.4 *Sei τ eine zufällige Zeit über Ω. Dann ist τ eine vorhersagbare $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}}$-Stoppzeit genau dann, wenn es eine monoton wachsende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{F}_+$-Stoppzeiten mit $\tau_n \leq \tau$ für $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß gilt*

(i) $\tau_n < \tau$ *auf* $\{0 < \tau\}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{P}$*-f. s.;*

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \tau$ $\mathbf{P}$*-f. s.*

Beweis: Zum Beweis dieses Satzes vergleiche man beispielsweise IV.69 - IV.78 in [8] bzw. Theorem 6.4.5 in [40]. □

Eine monoton wachsende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{F}_+$-Stoppzeiten mit den Eigenschaften (i) und (ii) aus dem vorhergehenden Satz nennt man auch *ankündigende Folge* für die $\mathbb{F}$-Stoppzeit τ.

Für spätere Zwecke benötigen wir ein allgemeineres und tiefgreifenderes Resultat als im Satz 2.1.3 beschrieben, welches als *Debut-Theorem* bekannt ist. Für eine Menge $A \subseteq \Omega \times \mathbb{R}_+$ definieren wir das *Debut von A* durch

$$D_A(\omega) := \inf\{\, t \geq 0 \,:\, (\omega, t) \in A\} \quad (\omega \in \Omega)\,.$$

Für das Debut einer Menge gilt nun der folgende Satz, wobei die Vollständigkeit des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes vorausgesetzt wird.

Satz 2.1.5 *Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine vollständige Filtration in $\mathcal{F}$ und $A \subseteq \Omega \times \mathbb{R}_+$.*

(a) Ist A eine $\mathbb{F}_+$-progressiv meßbare Menge, d. h., es gilt $A \cap [\![0,t]\!] \in \mathcal{F}_{t+} \otimes \mathfrak{B}([0,t])$ für $t \geq 0$. Dann ist das Debut D_A von A eine $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit.

(b) Ist $A \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_+)$ und gilt $[\![D_A]\!] \subseteq A$, so ist das Debut D_A von A eine vorhersagbare $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit.

Beweis: Für einen Beweis dieses Resultats vergleiche man Theorem III.T23 sowie Theorem IV.T16 in [7]. □

Für das Folgende sei eine beliebige zufällige Zeit $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ gegeben. Dann definieren wir für eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ das *System $\mathcal{F}_\tau$ von Ereignissen, die bis zur zufälligen Zeit τ eingetreten sind,* durch

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} :\, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}\,.$$

Ist $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter U-wertiger stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, so ist für jedes $\omega \in \Omega$ mit $\tau(\omega) < +\infty$ die Größe $X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega)$ wohldefiniert. Diese Größe kennzeichnet den Wert bzw. Zustand des Prozesses $\mathbf{X}$ zur zufälligen Zeit τ. Für $\tau(\omega) = +\infty$ macht das soeben definierte $X_\tau(\omega)$ keinen Sinn, da die Trajektorien des Prozesses $\mathbf{X}$ auf dem *(Zeit-)*Intervall $[0, +\infty[$ definiert sind. In diesem Fall erweitern wir den Prozeß $\mathbf{X}$ um eine beliebige $\mathcal{F}_\infty$-$\mathfrak{B}(U)$-meßbare Abbildung $X_\infty : \Omega \to U$ und setzen für $\omega \in \Omega$

$$X_\tau(\omega) = \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega), & \text{falls} \quad \tau(\omega) < \infty\,, \\ X_\infty(\omega), & \text{falls} \quad \tau(\omega) = \infty\,, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

wobei $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t)$. Die Definition von X_τ macht auch dann Sinn, wenn der Prozeß $\mathbf{X}$ nicht $\mathbb{F}$-adaptiert ist. Man wähle in diesem Fall $X_\infty : \Omega \to U$ so, daß X_∞ eine $\mathcal{F}$-$\mathfrak{B}(U)$-meßbare Abbildung ist. Die Größe X_∞ kann dabei als Konstante oder im Falle $U = \overline{\mathbb{R}}$ z. B. gewählt werden als

$$X_\infty(\omega) = \limsup_{t\in\mathbb{Q}_+} X_t(\omega) := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t>n, t\in\mathbb{Q}_+} X_t(\omega) \quad (\omega \in \Omega)\,.$$

Existiert im allgemeinen Fall dagegen der Grenzwert $\lim_{t\to+\infty} X_t$ in U punktweise, so ersetzen wir X_∞ durch diesen Grenzwert. Nimmt τ speziell nur endliche Wert an, so benötigt man X_∞ nicht, um X_τ zu definieren. Mit diesen Vorkehrungen haben wir folgende Meßbarkeitsaussagen:

Satz 2.1.7 *Es seien $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein U-wertiger stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration in $\mathcal{F}$ und τ eine zufällige Zeit. Dann gilt:*

(a) Ist τ eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit, so ist $\mathcal{F}_\tau$ eine σ-Algebra über Ω mit $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\tau^{\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}$.

(b) Ist $\mathbf{X}$ ein $\mathbb{F}$-progressiv meßbarer Prozeß und ist τ eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit, so ist X_τ eine $\mathcal{F}_\tau$-$\mathfrak{B}(U)$-meßbare Abbildung über Ω.

(c) Ist $\mathbf{X}$ $\mathbb{F}$-adaptiert mit rechtsstetigen Trajektorien und ist τ eine $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit, so ist der „gestoppte Prozeß“ $\mathbf{X}^\tau := (X_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter U-wertiger stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Beweis: Für einen Beweis dieses Satzes vergleiche man beispielsweise Lemma 49.11 in [2] bzw. Lemma 2.2.4 (a), Proposition 2.3.10 und Proposition 2.3.11 in [40]. □

2.2 Stetige lokale Martingale

In diesem Abschnitt wollen wir auf eine für diese Arbeit wichtige Klasse stochastischer Prozesse eingehen. Dabei handelt es sich um die sogenannten stetigen lokalen Martingale. Im folgenden sei stets $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum versehen mit einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$.

Definition 2.2.1 *Ein reeller stochastischer Prozeß $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ heißt lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal, falls dieser $\mathbb{F}$-adaptiert ist und eine monoton wachsende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{F}_+$-Stoppzeiten mit $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. existiert, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ der gestoppte Prozeß ${}^0\mathbf{M}^{\tau_n} = (M_{t\wedge\tau_n} - M_0)_{t\geq 0}$ ein $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal ist, d. h.,*

(a) $M_{t\wedge\tau_n} - M_0$ *ist* $\mathcal{F}_t$*-meßbar und* $\mathbf{P}$*-integrierbar für jedes* $t \geq 0$;

(b) *für beliebige* $0 \leq s < t$ *ist die Martingalgleichung*

$$\mathbb{E}(M_{t\wedge\tau_n} - M_0 \,|\, \mathcal{F}_s) = M_{s\wedge\tau_n} - M_0 \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{2.2.2}$$

erfüllt.

Sind die Trajektorien von $\mathbf{M}$ *darüber hinaus rechtsstetig bzw. stetig, so heißt* $\mathbf{M}$ *rechtsstetiges bzw. stetiges lokales* $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$*-Martingal.*

Es sei bemerkt, daß ein $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozeß genau dann ein stetiges lokales $(\mathbb{F}_+,\, \mathbf{P})$- bzw. $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}},\, \mathbf{P})$-Martingal ist, wenn dieser ein stetiges lokales $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$-Martingal ist.

Einige wichtige Aussagen für lokale Martingale wollen wir im folgenden Satz festhalten.

Satz 2.2.3 *Es sei* $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ *ein rechtsstetiges lokales* $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$*-Martingal über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*. Dann gilt:*

(a) *Ist* τ *eine* $\mathbb{F}_+$*-Stoppzeit, so ist der gestoppte Prozeß* $\mathbf{M}^\tau = (M_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ *ein rechtsstetiges lokales* $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$*-Martingal.*

(b) *Sei* τ *eine* $\mathbb{F}_+$*-Stoppzeit. Ist die Familie* $\{M_\sigma : \sigma \leq \tau, \sigma \text{ ist beschränkte } \mathbb{F}_+\text{-Stoppzeit}\}$ *gleichgradig-integrierbar, so ist der gestoppte Prozeß* $\mathbf{M}^\tau$ *ein rechtsstetiges* $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$*-Martingal. In diesem Fall existiert der Grenzwert* $\lim\limits_{t\to+\infty} M_{t\wedge\tau}$ *in* $\mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ *und stimmt mit* M_τ $\mathbf{P}$*-f. s. überein, und es gilt* $M_{t\wedge\tau} = \mathbb{E}(M_\tau \mid \mathcal{F}_t)$ $\mathbf{P}$*-f. s. für* $t \geq 0$.

Beweis: Der Beweis dieses Satzes ist eine Anwendung des Stopping-Theorems 3.2.7 in [40] (vgl. auch Korollar 3.2.8 bzw. Lemma 4.2.3 in [40]). □

Im folgenden bezeichnen $C(\mathbb{R}_+)$ den Raum der stetigen Funktionen $\mathbf{w} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und E_+ den Raum der monoton wachsenden Funktionen $\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)$ mit $\mathbf{w}(0) = 0$. Nach der Doob-Meyer Zerlegung existiert für jedes stetige lokale $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{M}$ ein $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-adaptierter stochastischer Prozeß $\langle \mathbf{M} \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Trajektorien in E_+, so daß $\mathbf{M}^2 - \langle \mathbf{M} \rangle$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}},\, \mathbf{P})$-Martingal ist. Dieser Prozeß ist $\mathbf{P}$-f. s. eindeutig bestimmt und heißt *quadratischer Variationsprozeß* von $\mathbf{M}$ (vgl. Theorem 5.6.2 und Korollar 6.6.3 in [40]). Eine andere Charakterisierung des quadratischen Variationsprozesses ist in Satz 2.3.3 angegeben.

Für das Verhalten der Trajektorien eines stetigen lokalen Martingals und dessen quadratischen Variationsprozeß besteht folgender Zusammenhang:

Satz 2.2.4 *Es sei* $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ *ein stetiges lokales* $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$*-Martingal. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) $\mathbf{M}$ *ist trivial, d. h., es gilt* $M_t = M_0$ *für alle* $t \geq 0$ $\mathbf{P}$*-f. s., genau dann, wenn* $\langle M \rangle_\infty = 0$ $\mathbf{P}$*-f. s. ist, wobei* $\langle M \rangle_\infty := \lim\limits_{t\to+\infty} \langle M \rangle_t$.

(b) *Die Konstantheitsintervalle von* $\mathbf{M}$ *und* $\langle \mathbf{M} \rangle$ *stimmen* $\mathbf{P}$*-f. s. überein, d. h., es existiert ein* $N \in \mathcal{N}_0^{\mathbf{P}}$*, so daß für* $\omega \in N^c$ *und beliebige nichtleere Intervalle* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$ *gilt:*

$$M_t(\omega) = M_b(\omega) \quad \text{für alle} \quad t \in [a, b] \quad \text{genau dann, wenn} \quad \langle M \rangle_a(\omega) = \langle M \rangle_b(\omega)\,.$$

(c) *Es existiert der endliche Grenzwert* $\lim\limits_{t\to+\infty} M_t$ *auf* $\{\langle M \rangle_\infty < +\infty\}$ $\mathbf{P}$*-f. s.*

(d) Es gilt $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} M_t = +\infty$ *und* $\underline{\lim\limits_{t\to+\infty}} M_t = -\infty$ *auf* $\{\langle M\rangle_\infty = +\infty\}$ $\mathbf{P}$*-f. s.*

Beweis: Zum Beweis dieser Eigenschaften vergleiche man Kapitel IV.1 und V.1 in [35]. □

Für zwei stetige lokale $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingale $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ und $\mathbf{N} = (N_t)_{t\geq 0}$ definiert man den *quadratischen Kovariationsprozeß* $\langle \mathbf{M}, \mathbf{N}\rangle = (\langle M, N\rangle_t)_{t\geq 0}$ von $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ durch

$$\langle \mathbf{M}, \mathbf{N}\rangle := \frac{1}{4}[\langle \mathbf{M} + \mathbf{N}\rangle - \langle \mathbf{M} - \mathbf{N}\rangle]\,.$$

Man beachte, daß der Prozeß $\mathbf{MN} - \langle \mathbf{M}, \mathbf{N}\rangle$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist, wobei $\mathbf{MN} := (M_t \cdot N_t)_{t\geq 0}$. Für eine $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit τ gilt insbesondere die Beziehung

(2.2.5) $$\langle \mathbf{M}^\tau, \mathbf{N}^\tau\rangle = \langle \mathbf{M}^\tau, \mathbf{N}\rangle = \langle \mathbf{M}, \mathbf{N}\rangle^\tau \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Hinsichtlich des stochastischen Integrals bezüglich stetiger lokaler Martingale wollen wir im folgenden nun einen groben Überblick geben. Für eingehendere Betrachtungen sei hier auf [5], [35], [40] bzw. [41] verwiesen.

Als erstes wollen wir kurz auf das Lebesgue-Stieltjes-Integral eingehen. Dazu sei $\mathbf{a} \in E_+$. Dann existiert genau ein σ-endliches Maß $\mu_{\mathbf{a}}$ auf $(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+))$, so daß gilt $\mu_{\mathbf{a}}([0,t]) = \mathbf{a}(t)$ für $t \geq 0$. Sei nun $\mathbf{v} \in C(\mathbb{R}_+)$ eine Funktion von *lokal beschränkter Variation,* d. h. $\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ für zwei Funktionen $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in E_+$. Wir definieren dann das zu $\mathbf{v}$ gehörige signierte Maß $\mu_{\mathbf{v}}$ durch $\mu_{\mathbf{v}} := \mu_{\mathbf{a}_1} - \mu_{\mathbf{a}_2}$ auf $(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+))$. Man beachte, daß die Definition von $\mu_{\mathbf{v}}$ unabhängig von der Zerlegung von $\mathbf{v}$ ist. Mit $\|\mathbf{v}\|$ bezeichnen wir die *totale Variationsfunktion* von $\mathbf{v}$, welche gegeben ist durch

$$\|\mathbf{v}\|(t) := \sup\{\sum_{k=1}^{n} |\mathbf{v}(t_k) - \mathbf{v}(t_{k-1})| \;:\; 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t\} \quad (t \geq 0)\,.$$

Insbesondere gilt $\|\mathbf{v}\| \in E_+$. Für den Fall eines monoton wachsenden $\mathbf{v}$ ist $\|\mathbf{v}\| = \mathbf{v}$.

Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$-meßbare Abbildung. Dann definieren wir für $t \geq 0$ das Lebesgue-Stieltjes-Integral von f bzgl. $\mathbf{v}$ auf $[0,t]$ durch

(2.2.6) $$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}\mathbf{v}(s) = \int_{[0,t]} f(s)\,\mu_{\mathbf{v}}(\mathrm{d}s)\,,$$

vorausgesetzt, das Integral auf der rechten Seite von (2.2.6) existiert, d. h., es gilt entweder $f \geq 0$ auf $\mathbb{R}_+$ und $\mu_{\mathbf{v}} \geq 0$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$ oder

(2.2.7) $$\int_0^t |f(s)|\;\mathrm{d}\|\mathbf{v}\|(s) := \int_{[0,t]} |f(s)|\;\mu_{\|\mathbf{v}\|}(\mathrm{d}s) < +\infty\,.$$

Sei nun $\mathbf{V} = (V_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter reeller stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit stetigen Trajektorien von *lokal beschränkter Variation,* also $\mathbf{V}$ ist Differenz zweier $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozesse über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Trajektorien in E_+. Für einen meßbaren $\overline{\mathbb{R}}_+$-wertigen stochastischen Prozeß $\mathbf{H} = (H_t)_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ist der Prozeß $\mathbf{H} \bullet \|\mathbf{V}\|$ mit

$$\mathbf{H} \bullet \|\mathbf{V}\|(\omega) := \left(\int_0^t H_s(\omega)\,\mathrm{d}\|\mathbf{V}(\omega)\|_s\right)_{t\geq 0}$$

für $\omega \in \Omega$ im Sinne von (2.2.7) wohlbestimmt. Insbesondere ist $\mathbf{H} \bullet \|\mathbf{V}\|$ ein stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Trajektorien in D_+, und es gilt $(\mathbf{H} \bullet \|\mathbf{V}\|)_0 = 0$. Dabei kennzeichnet D_+ die Menge aller monoton wachsenden und rechtsstetigen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ist darüber hinaus $\mathbf{H}$ an die Filtration $\mathbb{F}$ adaptiert, so ist auch $\mathbf{H} \bullet \|\mathbf{V}\|$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozeß. Mit $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbb{F})$ bezeichnen wir die Menge aller $\mathbb{F}$-progressiv meßbaren stochastischen Prozesse $\mathbf{H} = (H_t)_{t \geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit

$$\int_0^t |H_s(\omega)| \, \mathrm{d}\|\mathbf{V}(\omega)\|_s < +\infty \quad \text{für} \quad \mathbf{P}\text{-f. a.} \quad \omega \in \Omega \quad (t \geq 0)\,.$$

Für einen Prozeß $\mathbf{H} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbb{F})$ macht dann das gemäß (2.2.6) für $t \geq 0$ definierte Lebesgue-Stieltjes-Integral von $\mathbf{H}(\omega)$ bzgl. $\mathbf{V}(\omega)$ auf $[0, t]$ für $\mathbf{P}$-f. a. $\omega \in \Omega$ einen Sinn. Insbesondere existiert ein $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-adaptierter stochastischer Prozeß

$$\mathbf{H} \bullet \mathbf{V} := \left(\int_0^t H_s \, \mathrm{d}V_s \right)_{t \geq 0}$$

über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit stetigen Trajektorien von lokal beschränkter Variation, so daß $\mathbf{H} \bullet \mathbf{V}$ eine *Version des stochastischen Lebesgue-Stieltjes-Integrals von* $\mathbf{H}$ *bzgl.* $\mathbf{V}$ ist, d. h., es gibt ein $N \in \mathcal{N}_0^{\mathbf{P}}$, so daß für alle $\omega \in N^c$ gilt (vgl. Proposition 6.1.5 in [40])

$$\mathbf{H} \bullet \mathbf{V}(\omega) = \left(\int_0^t H_s(\omega) \, \mathrm{d}V_s(\omega) \right)_{t \geq 0} .$$

Nun können wir zur Definition des stochastischen Integrals bezüglich stetiger lokaler Martingale kommen. Dazu sei $\mathbf{M} = (M_t)_{t \geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Mit $\mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F})$ bezeichnen wir die Menge aller $\mathbb{F}$-vorhersagbaren stochastischen Prozesse $\mathbf{H} = (H_t)_{t \geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, für die gilt

$$\int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}\langle M \rangle_s < +\infty \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \quad (t \geq 0)\,. \tag{2.2.8}$$

Entsprechend der obigen Ausführungen ist für einen $\mathbb{F}$-vorhersagbaren stochastischen Prozeß $\mathbf{H} = (H_t)_{t \geq 0}$ die Bedingung $\mathbf{H} \in \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F})$ gleichwertig mit $\mathbf{H}^2 \in \mathcal{L}(\langle \mathbf{M} \rangle, \mathbb{F})$, wobei $\mathbf{H}^2 := (H_t^2)_{t \geq 0}$.

Für einen Prozeß $\mathbf{H} = (H_t)_{t \geq 0}$ aus $\mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F})$ definiert man dann das *stochastische Integral von* $\mathbf{H}$ *bzgl.* $\mathbf{M}$ als das $\mathbf{P}$-f. s. eindeutig bestimmte stetige lokale $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal

$$\mathbf{H} \bullet \mathbf{M} := \left(\int_0^t H_s \, \mathrm{d}M_s \right)_{t \geq 0}$$

mit $(\mathbf{H} \bullet \mathbf{M})_0 = 0$, so daß für jedes stetige lokale $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{N} = (N_t)_{t \geq 0}$ gilt

$$\langle \mathbf{H} \bullet \mathbf{M}, \mathbf{N} \rangle = \mathbf{H} \bullet \langle \mathbf{M}, \mathbf{N} \rangle \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{2.2.9}$$

Die rechte Seite von (2.2.9) macht wegen $\mathbf{H} \in \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F})$ Sinn, da aus einer Ungleichung von Kunita-Watanabe $\mathbf{H} \in \mathcal{L}(\langle \mathbf{M}, \mathbf{N} \rangle, \mathbb{F})$ folgt (vgl. Proposition IV.1.15 in [35]). Mit (2.2.9) erhalten wir dann für den quadratischen Variationsprozeß von $\mathbf{H} \bullet \mathbf{M}$ die Beziehung

$$\langle \mathbf{H} \bullet \mathbf{M} \rangle = \mathbf{H}^2 \bullet \langle \mathbf{M} \rangle \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Gemäß unserer Annahme sind die Trajektorien des Prozesses $\mathbf{M}$ stetig. Damit läßt sich die Klasse der Integranden, für die das stochastische Integral bzgl. $\mathbf{M}$ wohldefiniert ist, erweitern. Dies ist die Klasse der $\mathbb{F}$-progressiv meßbaren stochastischen Prozesse $\mathbf{H} = (H_t)_{t\geq 0}$, welche (2.2.8) erfüllen. Diese wollen wir mit $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{M}, \mathbb{F})$ bezeichnen. Für $\mathbf{H} \in \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{M}, \mathbb{F})$ ist dann das stochastische Integral von $\mathbf{H}$ bzgl. $\mathbf{M}$ definiert als das $\mathbf{P}$-f. s. eindeutig bestimmte stetige lokale $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal

$$\mathbf{H} \bullet \mathbf{M} := \left(\int_0^t H_s \, \mathrm{d}M_s \right)_{t \geq 0}$$

mit $(\mathbf{H} \bullet \mathbf{M})_0 = 0$, so daß für jedes stetige lokale $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{N} = (N_t)_{t\geq 0}$ Beziehung (2.2.9) erfüllt ist (vgl. Kapitel 6.3 in [40] bzw. Kapitel 3 in [5]).

Zum Schluß sei noch folgendes bemerkt. Ist $\mathbf{H} \in \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F})$, dann gilt

$$\mathbf{H} \bullet \mathbf{M} = \mathbf{H} \bullet {}^0\mathbf{M} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{2.2.10}$$

Diese Formel besagt also, daß der Anfangswert M_0 des stetigen lokalen Martingals $\mathbf{M}$ keinen Einfluß auf das stochastische Integral hat.

Für spätere Belange sind insbesondere solche lokale Martingale von Interesse, welche die Darstellbarkeitseigenschaft haben. Dabei besitzt ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ die $\mathbb{F}$-*Darstellbarkeitseigenschaft*, falls sich jedes $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ darstellen läßt als stochastisches Integral bzgl. $\mathbf{M}$, d. h., es gilt

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t H_s \, \mathrm{d}M_s \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

bzw. ${}^0\mathbf{Y} = \mathbf{H} \bullet \mathbf{M}$ $\mathbf{P}$-f. s. für ein $\mathbf{H} \in \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F}^{\mathbf{P}})$.

Ein Beispiel für ein stetiges lokales Martingal, welches zumindest bzgl. der kanonischen Filtration die Darstellbarkeitseigenschaft besitzt, ist die Brownsche Bewegung. Dabei heißt $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-*Brownsche Bewegung* jeder reelle stochastische Prozeß $\mathbf{B} = (B_t)_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, falls dieser folgende Bedingungen erfüllt:

(B1) der Prozeß $\mathbf{B}$ ist $\mathbb{F}$-adaptiert und besitzt stetige Trajektorien mit $B_0 = 0$ $\mathbf{P}$-f. s. und

(B2) für alle $0 \leq s < t < +\infty$ ist der Zuwachs $B_t - B_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ sowie normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$.

Für die Brownsche Bewegung als Spezialfall eines stetigen lokalen Martingals haben wir darüber hinaus noch folgende Charakterisierung von P. Lévy.

Satz 2.2.11 *Sei $\mathbf{B} = (B_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit stetigen Trajektorien und $B_0 = 0$ $\mathbf{P}$-f. s. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\mathbf{B}$ *ist eine* $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$*-Brownsche Bewegung.*

(b) $\mathbf{B}$ *ist ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$*-Martingal, und es gilt* $\langle B \rangle_t = t$ *für* $t \geq 0$ $\mathbf{P}$*-f. s.*

Beweis: Für einen Beweis dieses Satzes sei auf Theorem IV.3.6 in [35] oder auf Theorem 9.1.1 in [40] verwiesen. □

2.3 Stetige Semimartingale und lokale Zeit

Eine weitere wichtige Klasse von stochastischen Prozessen, in der sich die stetigen lokalen Martingale einordnen lassen und die für die stochastische Analysis von großer Bedeutung ist, ist die Klasse der stetigen Semimartingale. Gegeben seien wieder ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$.

Definition 2.3.1 *Ein reeller stochastischer Prozeß $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit stetigen Trajektorien heißt stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal, falls dieser $\mathbb{F}$-adaptiert ist und eine Zerlegung*

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} + \mathbf{V} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{2.3.2}$$

mit einem stetigen lokalen $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ und einem $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-adaptierten stochastischen Prozeß $\mathbf{V} = (V_t)_{t\geq 0}$ mit stetigen Trajektorien von lokal beschränkter Variation besitzt.

Für ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal $\mathbf{X}$ ist die Zerlegung (2.3.2) $\mathbf{P}$-f. s. eindeutig bestimmt, d. h., die Prozesse $\mathbf{M}$ und $\mathbf{V}$ sind jeweils $\mathbf{P}$-f. s. eindeutig bestimmt.

Ist $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal mit der Zerlegung (2.3.2), so wird der *quadratische Variationsprozeß* von $\mathbf{X}$, bezeichnet als $\langle \mathbf{X} \rangle = (\langle X \rangle_t)_{t\geq 0}$, definiert durch $\langle \mathbf{X} \rangle = \langle \mathbf{M} \rangle$. Damit ist $\langle \mathbf{X} \rangle$ ein $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Trajektorien in E_+, und dieser ist wiederum $\mathbf{P}$-f. s. eindeutig bestimmt. Neben dieser Definition gibt es noch eine weitere Charakterisierung des quadratischen Variationsprozesses eines stetigen Semimartingals, nämlich als Grenzwert der Summe seiner quadratischen Zuwächse. Dies besagt der folgende

Satz 2.3.3 *Es sei $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Zerlegung (2.3.2). Bezeichne $\Delta := \{0 \leq t_1 < t_2 \ldots < t_k < \ldots\}$ eine Partition von $\mathbb{R}_+$ mit $t_k \to +\infty$ für $k \to +\infty$ und*

$$T_t^{\Delta}(\mathbf{X}) := \sum_{k=1}^{\infty} (X_{t_{k+1}\wedge t} - X_{t_k \wedge t})^2 \quad \textit{für} \quad t \geq 0\,.$$

Für jedes $t \geq 0$ und für jede Folge $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Partitionen von $\mathbb{R}_+$ mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} \left| t_{k+1}^n - t_k^n \right| \to 0$ für $n \to +\infty$ konvergiert die Folge der Zufallsgrößen

$$\sup_{0\leq s\leq t} \left| T_s^{\Delta_n}(\mathbf{X}) - \langle X \rangle_s \right|$$

in Wahrscheinlichkeit gegen 0.

Beweis: Für einen Beweis dieses Satzes vergleiche man beispielsweise Theorem IV.1.8 zusammen mit Proposition IV.1.18 in [35]. □

Das stochastische Integral bzgl. stetiger Semimartingale wird mit Hilfe des stochastischen Integrals bzgl. stetiger lokaler Martingale wie folgt eingeführt bzw. definiert. Sei dazu $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit der Zerlegung (2.3.2). Für einen Prozeß

$$\mathbf{H} = (H_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{F}) := \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F}) \cap \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbb{F})$$

definiert man das *stochastische Integral von* $\mathbf{H}$ *bzgl.* $\mathbf{X}$ als das $\mathbf{P}$-f. s. eindeutig bestimmte stetige $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Semimartingal

$$\mathbf{H} \bullet \mathbf{X} := \left(\int_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s \right)_{t \geq 0}$$

mit der Zerlegung

$$\mathbf{H} \bullet \mathbf{X} = \mathbf{H} \bullet \mathbf{M} + \mathbf{H} \bullet \mathbf{V} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Entsprechend dem vorhergehenden Abschnitt bezeichnen $\mathbf{H} \bullet \mathbf{M}$ das stochastische Integral von $\mathbf{H}$ bezüglich des stetigen lokalen $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingals $\mathbf{M}$ und $\mathbf{H} \bullet \mathbf{V}$ eine Version des stochastischen Lebesgue-Stieltjes-Integrals von $\mathbf{H}$ bezüglich $\mathbf{V}$.

Für das Stoppen stochastischer Integrale wollen wir folgendes festhalten. Ist τ eine $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit, so ist mit $\mathbf{X}$ auch der gestoppte Prozeß $\mathbf{X}^\tau$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal. Für einen stochastischen Prozeß $\mathbf{H}$ aus $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{F})$ ist $\mathbf{H} \in \mathcal{L}(\mathbf{X}^\tau, \mathbb{F})$, und es gilt die Stoppregel für stochastische Integrale:

$$(\mathbf{H} \bullet \mathbf{X})^\tau = (\mathbf{H}\, \mathrm{I}_{[\![0,\tau]\!]}) \bullet \mathbf{X} = \mathbf{H} \bullet \mathbf{X}^\tau \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{2.3.4}$$

Mit Hilfe stochastischer Integrale bzgl. stetiger Semimartingale läßt sich der Begriff der *lokalen Zeit* eines stetigen Semimartingals einführen. Die lokale Zeit kann dabei als ein Maß aufgefaßt werden, wieviel „Zeit“ ein stetiges Semimartingal in einem gegebenen Zustand verbringt. Dabei wird in der Literatur zwischen *rechter, linker* bzw. *symmetrischer lokaler Zeit* unterschieden.

Definition 2.3.5 *Sei* $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ *ein stetiges* $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$*-Semimartingal über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*. Die rechte (linke bzw. symmetrische) lokale Zeit von* $\mathbf{X}$ *ist eine* $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$*-meßbare Abbildung*

$$L^{\mathbf{X}} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ ,$$

so daß die Tanaka-Formel

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) \, \mathrm{d}X_s + L^{\mathbf{X}}(\,\cdot\,, t, a) \tag{2.3.6}$$

für alle $t \geq 0$ *und* $a \in \mathbb{R}$ $\mathbf{P}$*-f. s. erfüllt ist, wobei auf* $\mathbb{R}$ *gilt*

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad x > 0 \,, \\ -1 \quad (1 \quad \textit{bzw.} \quad 0) & \textit{für} \quad x = 0 \,, \\ -1 & \textit{für} \quad x < 0 \,. \end{cases}$$

Man beachte, daß das in (2.3.6) auftretende stochastische Integral wohldefiniert ist und existiert. Dies folgt aus der Tatsache, da der Integrand $(\operatorname{sgn}(X_t - a))_{t \geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-vorhersagbarer reeller stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ist, welcher verstanden als Abbildung auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$ gleichmäßig beschränkt ist.

Bemerkung 2.3.7 Aus der Tanaka-Formel ergibt sich für die drei Arten der lokalen Zeit $L^{\mathbf{X}}$ eines stetigen $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingals $\mathbf{X}$ der Zusammenhang

$$L_s^{\mathbf{X}}(\,\cdot\,, t, a) = \frac{1}{2} \left(L_r^{\mathbf{X}}(\,\cdot\,, t, a) + L_l^{\mathbf{X}}(\,\cdot\,, t, a) \right) , \quad t \geq 0 \,, a \in \mathbb{R} \,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} , \tag{2.3.8}$$

wobei die Indizes l, r, s auf die jeweilige Wahl der lokalen Zeit hinweisen soll.

Einige wichtige Eigenschaften der lokalen Zeit eines stetigen Semimartingals faßt der nun folgende Satz zusammen.

Satz 2.3.9 *Sei $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und bezeichne $L^{\mathbf{X}}$ die rechte (linke bzw. symmetrische) lokale Zeit von $\mathbf{X}$, dann gilt*

(a) *Für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $N_a \in \mathcal{N}_0^{\mathbf{P}}$, so daß für jedes $\omega \in N_a^c$ die Abbildung $t \mapsto L^{\mathbf{X}}(\omega, t, a)$ zu E_+ gehört und*

$$\int_0^\infty \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\{a\}}(X_s(\omega))\, \mathrm{d}L^{\mathbf{X}}(\omega, s, a) = 0 \tag{2.3.10}$$

erfüllt ist.

(b) *Im Falle der rechten (bzw. linken) lokalen Zeit $L^{\mathbf{X}}$ existiert eine Menge $N \in \mathcal{N}_0^{\mathbf{P}}$, so daß für jedes $\omega \in N^c$ die Abbildung $(t, a) \mapsto L^{\mathbf{X}}(\omega, t, a)$ stetig in $t \in \mathbb{R}_+$ und rechtsstetig mit linksseitigem Grenzwert (bzw. linksstetig mit rechtsseitigem Grenzwert) in $a \in \mathbb{R}$ ist.*

(c) *Ist $\mathbf{X}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal, so gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}_0^{\mathbf{P}}$, so daß für jedes $\omega \in N^c$ die Abbildung $(t, a) \mapsto L^{\mathbf{X}}(\omega, t, a)$ stetig in $(t, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ist, und es gilt*

$$L^{\mathbf{X}}(\omega, t, a) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathrm{I}_{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[}(X_s(\omega))\, \mathrm{d}\langle X \rangle_s(\omega) \quad ((t, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})\,. \tag{2.3.11}$$

Beweis: Zum Beweis dieses Satzes siehe man beispielsweise Abschnitt V.6 in [25] bzw. Kapitel VI.1 in [35]. □

Der Einfachheit halber wollen wir für die rechte (linke bzw. symmetrische) lokale Zeit $L^{\mathbf{X}}$ von $\mathbf{X}$ stets $L^{\mathbf{X}}(t, a) = L^{\mathbf{X}}(\,\cdot\,, t, a)$ für $(t, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ setzen, sofern die ω-Komponente nicht näher spezifiziert werden soll. Darüber hinaus kann die lokale Zeit $L^{\mathbf{X}}$ von $\mathbf{X}$ so gewählt werden, daß $L^{\mathbf{X}}(t, a)$ eine $\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}}$-meßbare Zufallsgröße für jedes $(t, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ist.

Mit Hilfe der lokalen Zeit eines stetigen Semimartingals erhalten wir für die Anwendung zwei wichtige Formeln. Dies ist zum einen eine Verallgemeinerung der klassischen Itô-Formel und zum anderen eine Formel für die Aufenthaltszeit, welche weitere Aussagen über das Verhalten eines stetigen Semimartingals erlauben. Zuvor wollen wir aber einige nützliche Aspekte über konvexe Funktionen zusammentragen, die für das Weitere wesentlich sind. Man vergleiche hierfür beispielsweise auch die Ausführungen im Anhang 3 von [35].

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, dann existieren für jedes $x \in \mathbb{R}$ die beiden endlichen Grenzwerte

$$D^- f(x) := \lim_{h \uparrow 0} \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] \quad \text{bzw.} \quad D^+ f(x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)]\,.$$

Die auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $D^- f$ bzw. $D^+ f$ sind dann rechts- bzw. linksstetig sowie monoton wachsend. Man nennt $D^- f$ die linksseitige, $D^+ f$ die rechtsseitige bzw. $\frac{1}{2}(D^- f + D^+ f)$ die symmetrische Ableitung der konvexen Funktion f auf $\mathbb{R}$. Für die einzelnen Ableitungen Df von f definieren wir dann

$$n_f([a, b]) := Df(b+) - Df(a-) \quad \text{für} \quad -\infty < a < b < +\infty\,,$$

wobei $Df(x-)$ bzw. $Df(x+)$ den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert der monoton wachsenden Funktion Df in $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Hierdurch wird in eindeutiger Weise ein Maß n_f auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ beschrieben (vgl. Abschnitt II.2. zusammen mit Abschnitt II.5. in [10]). Man nennt n_f das *Maß der zweiten Ableitung von f im Sinne von Distributionen.* Damit können wir folgenden Satz über die verallgemeinerte Itô-Formel formulieren:

Satz 2.3.12 (Itô-Meyer-Tanaka-Formel) *Seien $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann ist $f(\mathbf{X}) = (f(X_t))_{t\geq 0}$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, und es gilt*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t Df(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)\,n_f(\mathrm{d}a)\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{2.3.13}$$

Dabei bezeichnen Df die linksseitige (bzw. rechtsseitige, symmetrische) Ableitung von f, n_f das auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ eindeutig bestimmte Maß der zweiten Ableitung von f im Sinne von Distributionen und $L^{\mathbf{X}}$ die rechte (bzw. linke, symmetrische) lokale Zeit von $\mathbf{X}$.

Beweis: Zum Beweis dieser verallgemeinerten Itô-Formel vergleiche man Theorem 5.52 in [25] bzw. Theorem VI.1.5 in [35]. □

Bemerkung 2.3.14 Die Itô-Meyer-Tanaka-Formel (2.3.13) bleibt sogar richtig, wenn f Differenz zweier konvexer Funktionen ist. Entsprechend sind dann Df und n_f wohldefiniert, wobei n_f dann ein signiertes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ ist, welches lokal endlich ist.

Eine Folgerung aus der Itô-Meyer-Tanaka-Formel ist die Formel für die Aufenthaltszeit.

Satz 2.3.15 (Formel für die Aufenthaltszeit) *Seien $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative oder beschränkte $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbare Abbildung. Dann gilt die folgende Formel für die Aufenthaltszeit*

$$\int_0^t h(X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} h(a) L^{\mathbf{X}}(t,a)\,\ell(\mathrm{d}a)\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{2.3.16}$$

Die Beziehung (2.3.16) bleibt richtig, wenn anstelle der Zeit t eine beliebige zufällige Zeit eingesetzt wird.

Beweis: Zum Beweis vergleiche man die Bemerkung zu Theorem 5.52 in [25] bzw. Korollar VI.1.6 in [35]. □

Bemerkung 2.3.17 Speziell erhält man aus (2.3.16) für $h = \mathrm{I}_A$ mit $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ die Beziehung

$$\int_0^t \mathrm{I}_A(X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s = \int_A L^{\mathbf{X}}(t,a)\,\ell(\mathrm{d}a)\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Dies zeigt, für $\mathbf{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$ ist für beliebige $t \geq 0$ die auf $\mathbb{R}$ definierte Abbildung $a \mapsto L^{\mathbf{X}}(\omega, t, a)$ die Lebesgue-Dichte der *Verweildauer* der Trajektorie $\mathbf{X}(\omega)$ bis zur Zeit t, d. h., des auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ definierten Maßes

$$A \mapsto \int_0^t \mathrm{I}_A(X_s(\omega))\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s(\omega)\,.$$

Zum Abschluß wollen wir noch eine Begriffsbestimmung einführen, die sich auf stochastische Prozesse auf zufälligen Intervallen bezieht (vgl. Abschnitt V.1 in [25]). Dazu betrachten wir eine $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit S über Ω, für die eine monoton wachsende Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{F}_+$-Stoppzeiten mit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ existiert. Für solch eine zufällige Zeit S setzen wir

$$[\![0,S\| := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![0,S_n]\!] \subseteq \Omega \times \mathbb{R}_+ \,. \tag{2.3.18}$$

Wie man leicht nachprüft, gilt $[\![0,S[\![\subseteq [\![0,S\| \subseteq [\![0,S]\!]$.

Definition 2.3.19 *Es sei* E *eine Eigenschaft für stochastische Prozesse. Wir sagen, ein stochastischer Prozeß* $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ *über* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ *besitzt die Eigenschaft* E *auf* $[\![0,S\|$, *falls für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *der gestoppte Prozeß* $\mathbf{X}^{S_n}$ *die Eigenschaft* E *besitzt.*

Für ein stetiges $(\mathbb{F},\mathbf{P})$-Semimartingal $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ auf $[\![0,S\|$ definieren wir dann den quadratischen Variationsprozeß $\langle\mathbf{X}\rangle = (\langle X\rangle_t)_{t\geq 0}$ sowie die lokale Zeit $L^{\mathbf{X}}$ von $\mathbf{X}$ auf folgende Weise:

$$\langle X\rangle_t(\omega) := \begin{cases} \langle X^{S_n}\rangle_t(\omega)\,, & \text{falls } (\omega,t) \in [\![0,S_n]\!] \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\,, \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle X\rangle_{S_n}(\omega) & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Durch diese Definition erhalten wir einen $\overline{\mathbb{R}}_+$-wertigen $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-adaptierten stochastischen Prozeß über $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ mit monoton wachsenden und stetigen Trajektorien, für den $\langle X\rangle_0 = 0$ auf Ω gilt. Wegen $\langle\mathbf{X}\rangle^{S_n} = \langle\mathbf{X}^{S_n}\rangle$ für $n \in \mathbb{N}$ ist daher auch hier für $\langle\mathbf{X}\rangle$ die Bezeichnung *quadratischer Variationsprozeß* gerechtfertigt. Entsprechend wird die rechte (linke bzw. symmetrische) *lokale Zeit* $L^{\mathbf{X}}$ von $\mathbf{X}$ definiert.

Hinsichtlich des stochastischen Integrals bzgl. $\mathbf{X}$ sei $\mathcal{L}^S(\mathbf{X},\mathbb{F}) := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(\mathbf{X}^{S_n},\mathbb{F})$. Für einen stochastischen Prozeß $\mathbf{H} = (H_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{L}^S(\mathbf{X},\mathbb{F})$ definiert man dann das stochastische Integral von $\mathbf{H}$ bzgl. $\mathbf{X}$ als denjenigen $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-adaptierten stochastischen Prozeß $\mathbf{H}\bullet\mathbf{X}$, so daß auf $[\![0,S\|$ gilt $(\mathbf{H}\bullet\mathbf{X})^{S_n} = \mathbf{H}^{S_n}\bullet\mathbf{X}^{S_n}$ für $n \in \mathbb{N}$, und außerhalb von $[\![0,S\|$ sei $\mathbf{H}\bullet\mathbf{X}$ identisch 0. Damit gelten die Tanaka-Formel (2.3.6) sowie die Aussagen der Sätze 2.3.9, 2.3.12 und 2.3.15 auf $[\![0,S\|$ $\mathbf{P}$-f. s., d. h., diese bleiben für alle $t \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [0,S_n(\omega)]$ für ω außerhalb einer $\mathbf{P}$-Nullmenge richtig.

2.4 Zufällige Zeittransformation

In diesem Abschnitt wollen wir ein für die Arbeit wichtiges Instrument bereitstellen, nämlich das der Zeittransformation stochastischer Prozesse. Da wir hier nicht auf alle Einzelheiten eingehen können, die im Zusammenhang mit Zeittransformationen stehen, sei auf Abschnitt X.1 in [25] verwiesen. Dennoch sollen hier einige Grundbegriffe und wesentliche Aspekte zusammengetragen werden. Wiederum seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ gegeben.

Definition 2.4.1 *Eine* $\mathbb{F}$*-Zeittransformation ist ein stochastischer Prozeß* $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ *über* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ *mit rechtsstetigen und monoton wachsenden Trajektorien, so daß für jedes* $t \geq 0$ *die Zufallsgröße* T_t *eine* $\mathbb{F}$*-Stoppzeit ist.*

Seien $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathbb{F}$-Zeittransformation und $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Mit den Bezeichnungen zum Schluß von Abschnitt 2.1 definieren wir die *zeittransformierte Filtration*

$$\mathbb{F} \circ \mathbf{T} := (\mathcal{F}_{T_t})_{t\geq 0}$$

sowie den *zeittransformierten Prozeß*

$$\mathbf{X} \circ \mathbf{T} := (X_{T_t})_{t\geq 0}\,.$$

Gemäß Satz 2.1.7 sind $\mathbb{F} \circ \mathbf{T}$ eine Filtration in $\mathcal{F}$ und $\mathbf{X} \circ \mathbf{T}$ ein $\mathbb{F} \circ \mathbf{T}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, sofern $\mathbf{X}$ ein $\mathbb{F}$-progressiv meßbarer Prozeß ist. Darüber hinaus ist die zeittransformierte Filtration $\mathbb{F} \circ \mathbf{T}$ vollständig bzw. rechtsstetig, falls die Filtration $\mathbb{F}$ diese Eigenschaft besitzt.

Eine für unsere Belange interessante Klasse von Zeittransformationen wollen wir im folgenden einführen. Dazu bezeichne $\mathbf{A} = (A_t)_{t\geq 0}$ einen $\mathbb{F}$-adaptierten stochastischen Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Trajektorien in E_+, d. h., die Trajektorien von $\mathbf{A}$ sind stetig und monoton wachsend mit $A_0 = 0$. Für $t \geq 0$ definieren wir die zufälligen Zeiten:

(2.4.2) $$T_t(\omega) := \inf\{s \geq 0 :\ A_s(\omega) > t\} \quad (\omega \in \Omega)\,.$$

Aus Satz 2.1.3 (b) folgt dann, daß T_t eine $\mathbb{F}_+^{\mathbf{A}}$-Stoppzeit und wegen der $\mathbb{F}$-Adaptiertheit von $\mathbf{A}$ auch eine $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit für jedes $t \geq 0$ ist. Aus der Definition von T_t erhalten wir sogar, daß die Trajektorien des stochastischen Prozesses $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ in D_+ liegen. Mit anderen Worten, die Trajektorien von $\mathbf{T}$ nehmen Werte aus $\overline{\mathbb{R}}_+$ an, sind rechtsstetig und monoton wachsend. Somit ist $\mathbf{T}$ eine $\mathbb{F}_+$-Zeittransformation (vgl. auch Lemma 0.4.8 in [35]). Man bezeichnet die so definierte Zeittransformation $\mathbf{T}$ auch als *(verallgemeinerte) Rechtsinverse* von $\mathbf{A}$.

Aus der Definition von $\mathbf{T}$ lassen sich nun folgende nützliche Eigenschaften ableiten. Für $\omega \in \Omega$ gilt zunächst

$$T_t(\omega) < \infty \ \text{ für } \ t < A_\infty(\omega) \ \text{ und } \ T_t(\omega) = +\infty \ \text{ für } \ t \geq A_\infty(\omega)\,,$$

wobei $A_\infty(\omega) := \lim\limits_{t\to+\infty} A_t(\omega)$. Wegen der Stetigkeit der Trajektorien von $\mathbf{A}$ erhalten wir darüber hinaus, daß auf Ω gilt:

(2.4.3) $$A_{T_t} = t \wedge A_\infty \quad \text{für } \ t \geq 0$$

und

(2.4.4) $$s < A_t \quad \text{genau dann, wenn} \quad T_s < t \quad \text{für } \ s, t \geq 0\,.$$

Aus (2.4.4) folgt dann insbesondere, daß auch der Prozeß $\mathbf{A}$ eine $\mathbb{F}_+ \circ \mathbf{T}$-Zeittransformation ist. Schließlich haben wir für jedes $\omega \in \Omega$ und $t \geq 0$

(2.4.5) $$\{s \in \mathbb{R}_+ : A_s(\omega) = t\} = [T_{t-}(\omega), T_t(\omega)] \cap \mathbb{R}_+\,,$$

wobei $T_{t-}(\omega) := \lim\limits_{s\uparrow t} T_s(\omega) = \inf\{s \geq 0 :\ A_s(\omega) \geq t\}$ für $t > 0$ und $T_{0-}(\omega) := 0$.

Mit den obigen Bezeichnungen können wir folgendes Resultat formulieren, welches ein erster Schritt hin zur Zeittransformation stochastischer Integrale ist.

Satz 2.4.6 *Gegeben sei ein meßbarer $\overline{\mathbb{R}}_+$-wertiger stochastischer Prozeß $\mathbf{H} = (H_t)_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Dann gilt für jedes $\omega \in \Omega$ und $t \in [0, +\infty]$*

$$\int_0^t H_s(\omega)\,\mathrm{d}A_s(\omega) = \int_0^{A_t(\omega)} H_{T_s}(\omega)\,\mathrm{d}s\,.$$

Beweis: Für einen Beweis vergleiche man Theorem IV.T43 in [7] bzw. Lemma 1.6 in [18]. □

Für unsere weiteren Ausführungen ist es nun wichtig zu wissen, wie sich stochastische Prozesse und stochastische Integrale unter Zeittransformationen verhalten. Von großem Interesse sind hierbei solche Klassen von stochastischen Prozessen, die invariant gegenüber Zeittransformationen sind. Hierfür ist folgende Begriffsbestimmung nützlich.

Definition 2.4.7 *Es sei $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathbb{F}$-Zeittransformation über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Ein stochastischer Prozeß $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ heißt an $\mathbf{T}$ adaptiert bzw. $\mathbf{T}$-adaptiert, falls die Trajektorien von $\mathbf{X}$ konstant auf allen Sprungintervallen $[T_{t-}, T_t]$ sind. Im Detail heißt dies, für jedes $\omega \in \Omega$ gilt*

$$X_r(\omega) = X_s(\omega) \quad \textit{für alle} \quad r\,, s \in [T_{t-}(\omega), T_t(\omega)] \cap \mathbb{R}_+ \quad (t \geq 0)\,,$$

wobei vereinbarungsgemäß $T_{0-}(\omega) := 0$.

Damit können wir folgenden Satz formulieren, welcher auf Kazamaki (vgl. [30]) zurückzuführen ist.

Satz 2.4.8 *Sei $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ eine endliche $\mathbb{F}$-Zeittransformation, d. h., für $t \geq 0$ ist $T_t < +\infty$ auf Ω, und sei $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal (bzw. ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal oder ein $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozeß von lokal beschränkter Variation) über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, so daß $\mathbf{X}$ an $\mathbf{T}$ adaptiert ist. Dann gilt:*

(a) *$\mathbf{X} \circ \mathbf{T}$ ist ein stetiges $(\mathbb{F} \circ \mathbf{T}, \mathbf{P})$-Semimartingal (bzw. ein stetiges lokales $(\mathbb{F} \circ \mathbf{T}, \mathbf{P})$-Martingal oder ein $\mathbb{F} \circ \mathbf{T}$-adaptierter stochastischer Prozeß von lokal beschränkter Variation), und es gilt $\langle \mathbf{X} \circ \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{X} \rangle \circ \mathbf{T}$ $\mathbf{P}$-f. s.;*

(b) *für einen $\mathbf{T}$-adaptierten stochastischen Prozeß $\mathbf{H} \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{F})$ ist der zeittransformierte Prozeß $\mathbf{H} \circ \mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{X} \circ \mathbf{T}, \mathbb{F} \circ \mathbf{T})$, und es gilt*

$$(\mathbf{H} \bullet \mathbf{X}) \circ \mathbf{T} = (\mathbf{H} \circ \mathbf{T}) \bullet (\mathbf{X} \circ \mathbf{T}) \quad \mathbf{P}\textit{-f. s.}$$

Beweis: Zum Beweis dieses Satzes vergleiche man Theorem 10.16, Theorem 10.17 sowie Theorem 10.19 und Proposition 10.21 in [25]. □

Kapitel 3

Charakterisierung stetiger lokaler Martingalmaße

In diesem Kapitel wollen wir uns mit dem treibenden Prozeß der stochastischen Differentialgleichung **(1.0.1)** bzw. mit der Verteilung stetiger lokaler Martingale näher beschäftigen. Ziel ist es, eine einfache Beschreibung der Verteilung eines stetigen lokalen Martingals mittels Markov-Kerne zu finden. Diese Charakterisierung ist dann für das weitere Vorgehen unserer Arbeit von großem Nutzen, um insbesondere Bedingungen für die Existenz einer Lösung der betrachteten Gleichung **(1.0.1)** zu finden und zu beweisen.

Im Abschnitt 3.1 werden dafür zunächst einige wesentliche Grundlagen bereitgestellt. Dabei wollen wir zeigen, daß jedes stetige lokale Martingal im gewissen Sinne vollständig durch dessen Verteilung auf dem Raum der stetigen Funktionen charakterisiert wird. Weiterhin soll auf das Resultat von Dambis, Dubins und Schwarz hingeführt werden. Dieses bildet dann das Fundament für die Charakterisierung der Verteilung eines stetigen lokalen Martingals, womit wir uns im Abschnitt 3.2 genauer beschäftigen werden. Darüber hinaus soll hier ein spezieller Erweiterungsbegriff für stetige lokale Martingale eingeführt werden. Als Anwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 wollen wir im Abschnitt 3.3 die Verteilung der sogenannten puren stetigen lokalen Martingale beschreiben.

3.1 Vorbereitung

Wir betrachten den Raum $C(\mathbb{R}_+)$ der stetigen Funktionen $\mathbf{w} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Diesen Raum versehen wir mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$, d. h., auf $C(\mathbb{R}_+)$ betrachten wir die Metrik d definiert durch

$$\text{(3.1.1)} \qquad d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{0 \le t \le n} (|\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)| \wedge 1) \qquad (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in C(\mathbb{R}_+)) .$$

Zusammen mit der Metrik d wird somit $C(\mathbb{R}_+)$ zu einem polnischen Raum, d. h., $C(\mathbb{R}_+)$ wird mit der von d induzierten Topologie zu einem separablen vollständigen metrischen Raum. Mit $\mathbf{Z} = (Z_t)_{t \ge 0}$ bezeichnen wir im folgenden stets den Koordinatenprozeß auf $C(\mathbb{R}_+)$, also $Z_t(\mathbf{w}) := \mathbf{w}(t)$ für alle $\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)$ und $t \ge 0$. Für die σ-Algebra $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ der Borelschen Mengen von $C(\mathbb{R}_+)$ gilt dann insbesondere (vgl. Proposition I.4.1 in [24])

$$\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) = \mathcal{F}^{\mathbf{Z}}_\infty := \sigma(Z_s \, : \, s \ge 0) .$$

Die Familie aller Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbf{Q}$ auf $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ mit der Eigenschaft, daß der Koordinatenprozeß $\mathbf{Z}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z}}, \mathbf{Q})$-Martingal über $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)), \mathbf{Q})$ ist, wollen wir mit $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ abkürzend bezeichnen.

Seien nun $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ und $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Trajektorien in $C(\mathbb{R}_+)$. Die Verteilung $\mathbf{P_M}$ von $\mathbf{M}$ definiert dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Borelschen Meßraum $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$. Wir wollen zunächst zeigen, daß ein stetiges lokales Martingal durch dessen Verteilung im gewissen Sinne vollständig charakterisiert ist. Es gilt nämlich folgender

Satz 3.1.2 M *ist ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}}, \mathbf{P})$*-Martingal über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *genau dann, wenn* $\mathbf{P_M} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *gilt.*

Beweis: Für den Beweis der Notwendigkeit sei $\mathbf{M}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}}, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Wir setzen $\mathbf{Q} = \mathbf{P_M}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Es ist nun zu zeigen, daß der Koordinatenprozeß $\mathbf{Z}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z}}, \mathbf{Q})$-Martingal über $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)), \mathbf{Q})$ ist, womit wir $\mathbf{P_M} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ bewiesen hätten.

Dazu betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ die zufälligen Zeiten τ_n über $C(\mathbb{R}_+)$ mit

$$\tau_n(\mathbf{w}) := \inf\{s \geq 0 : \, |Z_s(\mathbf{w}) - Z_0(\mathbf{w})| \geq n\} \quad (\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)) \, .$$

Nach Definition ist die Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von $\mathbb{F}^{\mathbf{Z}}$-Stoppzeiten (vgl. Satz 2.1.3 (a)) mit

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_n(\mathbf{w}) = +\infty \quad \text{für} \quad \mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+) \, .$$

Es ist zu zeigen, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ der in den Nullpunkt verschobene und in τ_n gestoppte Prozeß ${}^0\mathbf{Z}^{\tau_n} := (Z_{t\wedge\tau_n} - Z_0)_{t\geq 0}$ ein $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z}}, \mathbf{Q})$-Martingal ist. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\sigma_n(\omega) := \tau_n(\mathbf{M}(\omega)) \quad (\omega \in \Omega) \, . \tag{3.1.3}$$

Dann ist $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von $\mathbb{F}^{\mathbf{M}}$-Stoppzeiten über Ω mit

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty \quad \text{auf} \quad \Omega \, .$$

Weiterhin betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ den gestoppten Prozeß ${}^0\mathbf{M}^{\sigma_n} = (M_{t\wedge\sigma_n} - M_0)_{t\geq 0}$. Laut Voraussetzung ist $\mathbf{M}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}}, \mathbf{P})$-Martingal. Nach Satz 2.2.3 (a) ist ${}^0\mathbf{M}^{\sigma_n}$ somit ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}}, \mathbf{P})$-Martingal, welches beschränkt ist. Satz 2.2.3 (b) liefert sodann, daß ${}^0\mathbf{M}^{\sigma_n}$ sogar ein stetiges $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Damit folgt aber, daß auch der Prozeß ${}^0\mathbf{Z}^{\tau_n}$ ein stetiges $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z}}, \mathbf{Q})$-Martingal für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist, wie die nachfolgende Argumentation zeigt.

Nach Konstruktion ist ${}^0\mathbf{Z}^{\tau_n}$ ein $\mathbb{F}^{\mathbf{Z}}$-adaptierter reeller stochastischer Prozeß mit stetigen Trajektorien (siehe Satz 2.1.7 (c)). Aus der Beschränktheit der Zufallsgrößen $Z_{t\wedge\tau_n} - Z_0$ auf $C(\mathbb{R}_+)$ folgt unmittelbar die $\mathbf{Q}$-Integrierbarkeit dieser Größen für jedes $t \geq 0$. Bleibt uns somit also noch die Martingaleigenschaft für den gestoppten Prozeß ${}^0\mathbf{Z}^{\tau_n}$ zu zeigen. Gemäß Definition ist zu zeigen, daß für beliebige $0 \leq s < t$ und $A \in \mathcal{F}_s^{\mathbf{Z}}$ gilt

$$\int_A (Z_{t\wedge\tau_n}(\mathbf{w}) - Z_0(\mathbf{w}))\, \mathbf{Q}(\mathrm{d}\mathbf{w}) = \int_A (Z_{s\wedge\tau_n}(\mathbf{w}) - Z_0(\mathbf{w}))\, \mathbf{Q}(\mathrm{d}\mathbf{w}) \, . \tag{3.1.4}$$

Sei dazu $A \in \mathcal{F}_s^{\mathbf{Z}}$ für ein $0 \leq s < t$ beliebig gewählt. Dann erhalten wir unter Verwendung der allgemeinen Transformationsformel für Integrale bzgl. eines Maßes

$$\int_A (Z_{t\wedge\tau_n}(\mathbf{w}) - Z_0(\mathbf{w}))\, \mathbf{Q}(\mathrm{d}\mathbf{w}) = \int_{\{\mathbf{M}\in A\}} (M_{t\wedge\sigma_n}(\omega) - M_0(\omega))\, \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega)\,. \tag{3.1.5}$$

Nun ist $\{\mathbf{M} \in A\} \in \mathcal{F}_s^{\mathbf{M}}$, da $\mathbf{M}^{-1}(\mathcal{F}_t^{\mathbf{Z}}) = \mathcal{F}_t^{\mathbf{M}}$ gilt (vgl. Satz I.4.4 in [10]). Aus der Eigenschaft, daß ${}^0\mathbf{M}^{\sigma_n}$ ein $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}}, \mathbf{P})$-Martingal ist, folgt aus der für jedes $t \geq 0$ gültigen Beziehung (3.1.5) die zu beweisende Martingalgleichung (3.1.4) für den Prozeß ${}^0\mathbf{Z}^{\tau_n}$. Da $0 \leq s < t$ und $A \in \mathcal{F}_s^{\mathbf{Z}}$ beliebig gewählt waren, folgt hieraus, daß ${}^0\mathbf{Z}^{\tau_n}$ ein stetiges $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z}}, \mathbf{Q})$-Martingal ist, womit wir insgesamt $\mathbf{P_M} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ bewiesen haben.

Für den Beweis der Hinlänglichkeit braucht man nur die Rollen von $\mathbf{M}$ und $\mathbf{Z}$ zu vertauschen und die Beziehungen (3.1.3) sowie (3.1.5) zu beachten. □

Dieser Satz besagt somit, daß jedes stetige lokale Martingal bzgl. der kanonischen Filtration vollständig durch dessen Verteilung auf $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ beschrieben wird. Es sei bemerkt, daß für einen $\mathbb{F}$-adaptierten stochastischen Prozeß $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ mit Trajektorien in $C(\mathbb{R}_+)$ und $\mathbf{P_M} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ Satz 3.1.2 lediglich aussagt, daß $\mathbf{M}$ ein stetiges lokales Martingal bzgl. $\mathbb{F}^{\mathbf{M}}$ und nicht bzgl. der größeren Filtration $\mathbb{F}$ ist. Als Beispiel sei hier die Brownsche Bewegung $\mathbf{B} = (B_t)_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ erwähnt. Aus Satz 2.2.11 wissen wir, daß $\mathbf{B}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{B}}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Bezüglich der konstanten Filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ mit $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}$ für $t \geq 0$ kann $\mathbf{B}$ kein lokales $(\mathbb{G}, \mathbf{P})$-Martingal sein. Aus der Martingalgleichung würde dann nämlich $B_t = B_0$ $\mathbf{P}$-f. s. für $t \geq 0$ folgen, was aber nach Definition einer Brownschen Bewegung nicht sein kann. Diesem Umstand der Vergrößerung der Filtration werden wir später noch Beachtung schenken.

Eine weitere für die Arbeit nützliche Aussage bezieht sich auf die Charakterisierung des quadratischen Variationsprozesses eines stetigen lokalen Martingals. Zunächst sei aber noch folgendes bemerkt. Man kann leicht überprüfen, daß der Raum E_+ bzgl. der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ (vgl. (3.1.1)) ein abgeschlossener Teilraum von $C(\mathbb{R}_+)$ ist. Da bekanntlich jeder abgeschlossene Teilraum eines separablen vollständigen metrischen Raumes (= polnischer Raum) ebenfalls separabel und vollständig ist, ist somit E_+ ebenfalls ein polnischer Raum. Darüber hinaus ist jeder polnische Raum U versehen mit der σ-Algebra $\mathfrak{B}(U)$ ein Borel Raum. Dabei heißt ein meßbarer Raum $(U, \mathcal{U})$ *Borel Raum*, falls eine Borelsche Menge $A \subseteq [0,1]$ sowie eine $\mathcal{U}$-$\mathfrak{B}(A)$-meßbare Bijektion $f : U \to A$ existieren, so daß f^{-1} ebenfalls $\mathfrak{B}(A)$-$\mathcal{U}$-meßbar ist.

Damit können wir folgenden einfachen Satz beweisen, wobei wir noch einmal daran erinnern wollen, daß $\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$ für ein $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ die augmentierte und nicht vervollständigte Filtration von $\mathbb{F}^{\mathbf{Z}}$ kennzeichnet (vgl. (2.1.1)).

Satz 3.1.6 *Es sei $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. Dann existiert eine $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(E_+)$-meßbare Abbildung*

$$\mathbf{\Phi} : C(\mathbb{R}_+) \to E_+\,,$$

welche $\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$-adaptiert ist, so daß gilt

$$\langle \mathbf{Z}\rangle(\mathbf{w}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{w}) \quad \textit{für} \quad \mathbf{Q}\textit{-f. a. } \mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)\,. \tag{3.1.7}$$

Insbesondere ist $\mathbf{\Phi}$ eindeutig bestimmt $\mathbf{Q}$-f. s. Ist $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $\mathbf{P_M} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$, dann ist

$$\langle \mathbf{M}\rangle = \mathbf{\Phi}(\mathbf{M}) \quad \mathbf{P}\textit{-f. s.}$$

Beweis: Die Eindeutigkeit einer solchen Abbildung mit den Eigenschaften des Satzes ist leicht einzusehen, denn dies folgt aus der Eindeutigkeit des quadratischen Variationsprozesses eines stetigen lokalen Martingals.

Die Existenz folgt aus Lemma 1.13 zusammen mit Lemma 1.25 in [29]. Man hat hierbei zu beachten, daß E_+ versehen mit der σ-Algebra $\mathfrak{B}(E_+)$ ein Borel Raum ist, und daß nach Definition des quadratischen Variationsprozesses die Abbildung

$$\langle \mathbf{Z} \rangle : C(\mathbb{R}_+) \to E_+$$

$\mathcal{F}_\infty^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$-$\mathfrak{B}(E_+)$-meßbar ist. Hieraus folgt zunächst die Existenz einer $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(E_+)$-meßbaren Abbildung

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} : C(\mathbb{R}_+) \to E_+$$

mit der Eigenschaft (3.1.7). Also gibt es eine $\mathbf{Q}$-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$, so daß für $\mathbf{w} \in N^c$ gilt $\tilde{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{Z} \rangle(\mathbf{w})$. Daraus folgt, daß $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ bzgl. der vervollständigten Filtration $\bar{\mathbb{F}}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$, aber nicht bzgl. $\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$ adaptiert ist. Setzt man

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{w}) := \begin{cases} \tilde{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{w}) & \text{für} \quad \mathbf{w} \in N^c\,, \\ 0 & \text{für} \quad \mathbf{w} \in N\,, \end{cases}$$

so ist $\mathbf{\Phi} : C(\mathbb{R}_+) \to E_+$ eine $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(E_+)$-meßbare Abbildung, für die (3.1.7) gilt. Aus der $\bar{\mathbb{F}}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$-Adaptiertheit des quadratischen Variationsprozesses $\langle \mathbf{Z} \rangle$ folgt dann hieraus schließlich die entsprechende $\bar{\mathbb{F}}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$-Adaptiertheit von $\mathbf{\Phi}$.

Bleibt uns also noch, den zweiten Teil des Satzes zu beweisen. Dazu betrachten wir ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{M} = (M_t)_{t \geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $\mathbf{P_M} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Entsprechend der Konstruktion ist $\mathbf{\Phi} = (\Phi_t)_{t \geq 0}$ ein $\bar{\mathbb{F}}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)), \mathbf{Q})$ mit Trajektorien in E_+. Mit (3.1.7) folgt dann, daß $\mathbf{Z}^2 - \mathbf{\Phi}$ ein stetiges lokales $(\bar{\mathbb{F}}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$-Martingal ist. Weiterhin stimmt auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ die Verteilung des Prozesses $\mathbf{M}^2 - \mathbf{\Phi}(\mathbf{M})$ bzgl. $\mathbf{P}$ mit der Verteilung von $\mathbf{Z}^2 - \mathbf{\Phi}(\mathbf{Z})$ bzgl. $\mathbf{Q}$ überein. Nach Satz 3.1.2, der auch gültig bleibt, wenn man anstelle von $\mathbb{F}^{\mathbf{M}}$ die Filtration $\bar{\mathbb{F}}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$ wählt, ist $\mathbf{M}^2 - \mathbf{\Phi}(\mathbf{M})$ somit ein stetiges lokales $(\bar{\mathbb{F}}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Aus der Eindeutigkeit des quadratischen Variationsprozesses eines stetigen lokalen Martingals folgt sodann $\langle \mathbf{M} \rangle = \mathbf{\Phi}(\mathbf{M})$ $\mathbf{P}$-f. s. □

Aus dem obigen Satz erhalten wir unmittelbar die

Folgerung 3.1.8 *Für $i = 1, 2$ seien $\mathbf{M}^i = (M_t^i)_{t \geq 0}$ zwei stetige lokale $(\mathbb{F}^i, \mathbf{P}^i)$-Martingale über $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i)$ mit $\mathbf{P}^1_{\mathbf{M}^1} = \mathbf{P}^2_{\mathbf{M}^2}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Dann gilt auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(E_+)$*

$$\mathbf{P}^1_{(\mathbf{M}^1, \langle \mathbf{M}^1 \rangle)} = \mathbf{P}^2_{(\mathbf{M}^2, \langle \mathbf{M}^2 \rangle)}\,.$$

Wie wir bereits ausgeführt haben, wollen wir die Verteilung eines stetigen lokalen Martingals genauer betrachten und diese durch bekannte und einfache Verteilungen charakterisieren. Dazu ist es hilfreich, sich zu überlegen, ob man nicht jedes stetige lokale Martingal durch andere bekannte Prozesse pfadweise darstellen lassen kann. Dies ist insofern naheliegend, da nach Satz 2.4.8 (a) jede zeittransformierte Brownsche Bewegung unter gewissen Voraussetzungen ein stetiges lokales Martingal ist. Das auch die Umkehrung gilt, besagt ein Satz von Dambis, Dubins und Schwarz (vgl. [6], [9]), welcher von Kunita und Watanabe (vgl. [31]) für allgemeinere lokale Martingale bewiesen wurde. Dieser Satz beinhaltet im wesentlichen, daß man jedes stetige lokale Martingal pfadweise aus einer Brownschen Bewegung mittels einer geeigneten Zeittransformation gewinnen kann. Bevor wir aber zu diesem Satz kommen, wollen wir zunächst den Begriff der gestoppten Brownschen Bewegung einführen.

Definition 3.1.9 *Es sei $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $W_0 = 0$ $\mathbf{P}$-f. s. und τ sei eine $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit. Der Prozeß $\mathbf{W}$ heißt eine in τ gestoppte $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung, falls gilt*

$$\langle W \rangle_t = t \wedge \tau\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{3.1.10}$$

Bemerkung 3.1.11 Aus (3.1.10) erhalten wir insbesondere die Beziehung

$$\langle W \rangle_\infty = \tau \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Ist in Definition 3.1.9 darüber hinaus $\tau = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s., so folgt aus Satz 2.2.11, daß $\mathbf{W}$ sogar eine $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung ist.

Ein einfaches Beispiel für eine gestoppte Brownsche Bewegung ist $\mathbf{W} = \mathbf{B}^\tau$ mit einer $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$-Brownschen Bewegung $\mathbf{B} = (B_t)_{t\geq 0}$ und einer $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit τ. Umgekehrt stellt sich hier die Frage, ob man nicht jede gestoppte Brownsche Bewegung aus einer Brownschen Bewegung durch geeignetes Abstoppen gewinnen kann. Im allgemeinen ist aber der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum zu klein, so daß dieser eine Brownsche Bewegung mit der gewünschten Eigenschaft trägt. Daher ist es nützlich, den gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum und die Filtration entsprechend zu erweitern, was uns zu folgender Definition führt (vgl. Definition II.7.1 in [24]). Dazu sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ gegeben.

Definition 3.1.12 *Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}},\, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ in $\tilde{\mathcal{F}}$ heißt π-Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mathbb{F}$, falls $\pi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ eine surjektive und $\tilde{\mathcal{F}}$-$\mathcal{F}$-meßbare Abbildung ist, so daß gilt:*

(i) $\pi^{-1}(\mathcal{F}_t) \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_t$ *für* $t \geq 0\,;$

(ii) $\tilde{\mathbf{P}} \circ \pi^{-1} = \mathbf{P}$ *auf* $\mathcal{F}\,;$

(iii) Für jede $\mathbf{P}$-f. s. beschränkte Zufallsgröße ξ über Ω gilt

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}(\tilde{\xi} \,|\, \tilde{\mathcal{F}}_t) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}(\tilde{\xi} \,|\, \pi^{-1}(\mathcal{F}_t)) \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} \quad \text{für alle} \quad t \geq 0\,,$$

wobei $\tilde{\xi}(\tilde{\omega}) := \xi(\pi(\tilde{\omega}))$ $(\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega})$ für jede über Ω definierte Zufallsvariable ξ.

Bemerkung 3.1.13 Mit den Bezeichnungen aus Definition 3.1.12 ist Bedingung (iii) äquivalent zu folgender Bedingung: Für jede $\mathbf{P}$-f. s. beschränkte Zufallsgröße ξ über Ω gilt für $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}(\tilde{\xi} \,|\, \tilde{\mathcal{F}}_t)(\tilde{\omega}) = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\xi \,|\, \mathcal{F}_t)(\pi(\tilde{\omega})) \quad \text{für} \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. a.} \quad \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}\,.$$

Der Beweis dieser Äquivalenz folgt ohne Probleme aus der Definition des bedingten Erwartungswertes und da

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}(\tilde{\xi} \,|\, \pi^{-1}(\mathcal{F}_t))(\tilde{\omega}) = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\xi \,|\, \mathcal{F}_t)(\pi(\tilde{\omega})) \quad \text{für} \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. a.} \quad \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$$

gilt.

Im allgemeinen geht bei Vergrößerung der Filtration die Martingaleigenschaft eines Prozesses verloren. Die Bedingung (iii) aus Definition 3.1.12 garantiert nun aber, daß diese Eigenschaft eines Prozesses bei Erweiterung des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes und der Filtration erhalten bleibt. Dies soll im folgenden Satz zusammengefaßt werden.

Satz 3.1.14 *Es seien* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ *und* $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ *eine* π*-Erweiterung von* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *und* $\mathbb{F}$. *Weiterhin sei* $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ *ein* $\mathbb{F}$*-adaptierter reeller stochastischer Prozeß über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. *Dann gilt:*

(i) Ist $\mathbf{M}$ *ein lokales* $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$*-Martingal, dann ist mit den Bezeichnungen aus Definition 3.1.12 auch der Prozeß* $\tilde{\mathbf{M}} := (\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ *ein lokales* $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$*-Martingal über* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$.

(ii) Besitzt $\mathbf{M}$ *darüber hinaus stetige Trajektorien, so gilt auch die Umkehrung von (i), und es ist*

$$\langle \tilde{\mathbf{M}} \rangle = \widetilde{\langle \mathbf{M} \rangle} \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} \tag{3.1.15}$$

(iii) Für $\mathbf{H} = (H_t)_{t\geq 0}$ *aus* $\mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F})$ *ist auch* $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbb{F}})$, *wobei* $\mathbf{M}$ *ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$*-Martingal ist, und es gilt*

$$\tilde{\mathbf{H}} \bullet \tilde{\mathbf{M}} = \widetilde{\mathbf{H} \bullet \mathbf{M}} \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} \tag{3.1.16}$$

Beweis: Für einen Beweis dieses Satzes vergleiche man beispielsweise Lemma 6.27 in [21] sowie die Ausführungen im Abschnitt X.2 in [25]. □

Bemerkung 3.1.17 Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die Aussagen (i) und (iii) des Satzes 3.1.14 richtig bleiben, wenn an Stelle des lokalen Martingals ein stetiges Semimartingal gewählt wird. Man hat hierbei die einfache Tatsache zu beachten, daß für einen Prozeß mit stetigen Trajektorien von lokal beschränkter Variation diese Eigenschaft der Trajektorien bei Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraumes nicht verlorengeht.

Wie sich Stoppzeiten bei π-Erweiterungen von Wahrscheinlichkeitsräumen verhalten, besagt folgendes Resultat:

Satz 3.1.18 *Es seien* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ *und* $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ *eine* π*-Erweiterung von* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *und* $\mathbb{F}$, *wobei* $\pi^{-1}(\mathcal{F}_t) = \tilde{\mathcal{F}}_t$ *für* $t \geq 0$ *gelte. Eine Abbildung* $\tau^* : \tilde{\Omega} \to [0, +\infty]$ *ist genau dann eine* $\tilde{\mathbb{F}}_+$*-Stoppzeit (bzw. vorhersagbare* $\tilde{\mathbb{F}}_+$*-Stoppzeit), wenn es eine* $\mathbb{F}_+$*-Stoppzeit (bzw. vorhersagbare* $\mathbb{F}_+$*-Stoppzeit)* τ *über* Ω *mit* $\tau^* = \tilde{\tau}$ *gibt.*

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes vergleiche man auch Proposition 10.5 in [25].

Sei $\tau^* : \tilde{\Omega} \to [0, +\infty]$ und es gebe eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit τ über Ω mit $\tau^* = \tilde{\tau}$ auf $\tilde{\Omega}$. Dann folgt allein aus Eigenschaft (i) von Definition 3.1.12, daß τ^* eine $\tilde{\mathbb{F}}$-Stoppzeit ist. Sei umgekehrt τ^* eine $\tilde{\mathbb{F}}_+$-Stoppzeit über $\tilde{\Omega}$, was gleichbedeutend damit ist, daß $\{\tau^* < t\} \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ für jedes $t \geq 0$ gilt. Aufgrund der Voraussetzung existiert somit für jedes $t \geq 0$ ein $A_t \in \mathcal{F}_t$ mit $\{\tau^* < t\} = \pi^{-1}(A_t)$. Für $t \geq 0$ betrachten wir die aufsteigende Familie $(B_t)_{t\geq 0}$ von Mengen der Gestalt

$$B_t := \bigcup_{0\leq s<t,\, s\in\mathbb{Q}_+} A_s \in \mathcal{F}_t \,.$$

Auf Ω definieren wir eine Abbildung $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ durch

$$\tau(\omega) := \inf\{t \geq 0 \,:\, \omega \in B_t\} \quad (\omega \in \Omega)\,.$$

Man kann nun leicht zeigen, daß $\{\tau < t\} = B_t$ für $t \geq 0$ gilt. Somit ist τ eine $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit, und es ist

$$\{\tilde{\tau} < t\} = \pi^{-1}(\{\tau < t\}) = \bigcup_{0\leq s<t,\, s\in\mathbb{Q}_+} \pi^{-1}(A_s) = \{\tau^* < t\} \quad (t \geq 0)\,.$$

Hieraus folgt dann aber $\tau^* = \tilde{\tau}$ auf $\tilde{\Omega}$ mit einer $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit τ.

Für den Fall vorhersagbarer Stoppzeiten folgt die Behauptung aus der einfach zu beweisenden Identität

$$\mathcal{P}(\tilde{\mathbb{F}}_+) = \{\, \{(\tilde{\omega}, t) \in \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \,:\, (\pi(\tilde{\omega}), t) \in A\} \,:\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_+) \,\}\,. \tag{3.1.19}$$

Zum Nachweis dieser Gleichheit hat man zu beachten, daß die σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{F}_+)$ erzeugt wird von den Mengen $A \times \{0\}$ mit $A \in \mathcal{F}_{0+}$ sowie von allen stochastischen Intervallen der Gestalt $[\![0, \sigma]\!]$, wobei σ eine $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit ist. Entsprechendes gilt auch für $\mathcal{P}(\tilde{\mathbb{F}}_+)$. Ist nun τ eine vorhersagbare $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit über Ω mit $\tau^* = \tilde{\tau}$, wobei $\tau^* : \tilde{\Omega} \to [0, +\infty]$. So folgt aus **(3.1.19)** und der Definition vorhersagbarer Stoppzeiten unmittelbar, daß auch τ^* eine vorhersagbare $\tilde{\mathbb{F}}_+$-Stoppzeit ist. Andererseits folgt mit dem ersten Teil des Satzes und der Surjektivität von π aus **(3.1.19)**, daß für eine vorhersagbare $\tilde{\mathbb{F}}_+$-Stoppzeit τ^* eine vorhersagbare $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit τ mit $\tau^* = \tilde{\tau}$ existiert. Damit ist der Beweis des Satzes vollständig. □

Als Anwendung dieses Satzes wollen wir auf die zu Beginn von Definition 3.1.12 angeführte Fragestellung eingehen. In dem nun folgenden Satz wollen wir ein Konstruktionsverfahren zur Erweiterung eines Wahrscheinlichkeitsraumes angeben, womit dann die dort gestellte Frage positiv beantwortet werden kann.

Satz 3.1.20 *Es sei $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ eine in τ gestoppte $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Dann existieren eine π-Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ in $\tilde{\mathcal{F}}$ von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mathbb{F}$ und eine $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Brownsche Bewegung $\mathbf{B}^* = (B^*_t)_{t\geq 0}$ über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$, so daß über $\tilde{\Omega}$ gilt*

$$\mathbf{B}^{*\tilde{\tau}} = \tilde{\mathbf{W}}\,.$$

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes wollen wir im wesentlichen darauf eingehen, wie man zu einer Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mathbb{F}$ kommt, welches dann das Gewünschte leistet. Für Einzelheiten vergleiche man Proposition 9.1.5 in [40] sowie Satz 5.7 in [21].

Sei $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ eine in τ gestoppte $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Wir wählen eine weitere $(\mathbb{F}', \mathbf{P}')$-Brownsche Bewegung $\mathbf{W}' = (W'_t)_{t\geq 0}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$. Beispielsweise kann hierfür der Wiener-Raum gewählt werden. Nun seien

$$\tilde{\Omega} := \Omega \times \Omega'\,, \quad \tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'\,, \quad \tilde{\mathbf{P}} := \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}'\,, \quad \tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t \quad \text{für} \quad t \geq 0$$

sowie $\pi(\tilde{\omega}) := \omega$ für $\tilde{\omega} := (\omega, \omega') \in \tilde{\Omega}$.

Damit erhalten wir eine π-Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ in $\tilde{\mathcal{F}}$ von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mathbb{F}$. Nach Definition ist π surjektiv sowie $\tilde{\mathcal{F}}$-$\mathcal{F}$-meßbar. Die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 3.1.12 sind ebenfalls leicht einzusehen. Für den Nachweis von (iii) aus Definition 3.1.12 sei ξ eine $\mathbf{P}$-f. s. beschränkte Zufallsgröße über Ω. Für $t \geq 0$ betrachten wir die Mengen $A \times A' \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ mit $A \in \mathcal{F}_t$ und $A' \in \mathcal{F}'_t$. Dann folgt aus der Definition bedingter Erwartungswerte und der Definition von $\tilde{\mathbf{P}}$

$$\begin{aligned}\int\limits_{A\times A'} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}(\tilde{\xi} \,|\, \tilde{\mathcal{F}}_t)(\tilde{\omega})\; \tilde{\mathbf{P}}(\mathrm{d}\tilde{\omega}) &= \int\limits_{A'} \Big(\int\limits_{A} \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\xi \,|\, \mathcal{F}_t)(\omega)\; \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega)\Big)\; \mathbf{P}'(\mathrm{d}\omega') \\ &= \int\limits_{A\times A'} \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\xi \,|\, \mathcal{F}_t)(\pi(\tilde{\omega}))\; \tilde{\mathbf{P}}(\mathrm{d}\tilde{\omega})\,.\end{aligned}$$

Mit dem Eindeutigkeitssatz für Maße und Bemerkung 3.1.13 erhalten wir hieraus somit die Gültigkeit von Definition 3.1.12 (*iii*). Man hat hierbei nur zu beachten, daß die σ-Algebra $\tilde{\mathcal{F}}_t$ von allen Mengen der Gestalt $A \times A'$ mit $A \in \mathcal{F}_t$ und $A' \in \mathcal{F}'_t$ erzeugt wird, wobei dieses Mengensystem durchschnittsstabil ist sowie $\tilde{\Omega}$ enthält.

Entsprechend kann auch $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit der Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ als eine π'-Erweiterung von $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ und $\mathbb{F}'$ aufgefaßt werden, wobei π' die Projektion von $\tilde{\Omega}$ auf die zweite Komponente ist. Aus Satz 3.1.14 folgt dann nach Konstruktion, daß sowohl $\tilde{\mathbf{W}}$ als auch $\tilde{\mathbf{W}}'$ stetige lokale $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingale über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit $\tilde{W}_0 = \tilde{W}'_0 = 0$ $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. sind. Darüber hinaus ist $\tilde{\tau}$ eine $\tilde{\mathbb{F}}_+$ Stoppzeit, so daß mit Satz 2.2.3 (a) der gestoppte Prozeß $\tilde{\mathbf{W}}'^{\tilde{\tau}}$ ein stetiges lokales $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal ist. Mit **(3.1.15)** folgt weiterhin, daß $\tilde{\mathbf{W}}$ eine in $\tilde{\tau}$ gestoppte $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Brownsche Bewegung ist. Für $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ sei nun

$$B^*_t(\tilde{\omega}) := \tilde{W}_t(\tilde{\omega}) + \tilde{W}'_t(\tilde{\omega}) - \tilde{W}'_{t \wedge \tilde{\tau}}(\tilde{\omega}) \quad \text{für} \quad t \geq 0\,.$$

Dann ist $\mathbf{B}^* = (B^*_t)_{t \geq 0}$ ein stetiges lokales $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal mit $\langle B^* \rangle_t = t$ für $t \geq 0$ $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. Zusammen mit Satz 2.2.11 ist $\mathbf{B}^*$ somit eine $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Brownsche Bewegung, und es gilt $\mathbf{B}^{*\tilde{\tau}} = \tilde{\mathbf{W}}$. □

Damit hat man nun eine Möglichkeit, eine gestoppte Brownsche Bewegung aus einer ungestoppten Brownschen Bewegung zu gewinnen, indem man den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum gemäß obiger Vorschrift entsprechend erweitert. Dieses Konstruktionsverfahren stellt in Verbindung mit dem nachfolgenden Satz einen pfadweisen Zusammenhang zwischen stetigen lokalen Martingalen und Brownscher Bewegung her.

Sei $\mathbf{M} = (M_t)_{t \geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Aus Satz 2.2.4 (c) wissen wir, daß der Grenzwert $\lim\limits_{t \to +\infty} M_t$ auf $\{\langle M \rangle_\infty < +\infty\}$ $\mathbf{P}$-f. s. existiert und endlich ist. Also gibt es ein $N \in \mathcal{N}_0^{\mathbf{P}}$, so daß für $\omega \in N^c \cap \{\langle M \rangle_\infty < +\infty\}$ der Grenzwert $M_\infty(\omega) := \lim\limits_{t \to +\infty} M_t(\omega)$ in $\mathbb{R}$ existiert und endlich ist. Darüber hinaus können wir entsprechend Satz 2.2.4 (b) ohne Einschränkung annehmen, daß die $\mathbf{P}$-Nullmenge N so beschaffen ist, daß für alle $\omega \in N^c$ die Trajektorien $\mathbf{M}(\omega)$ und $\langle \mathbf{M} \rangle(\omega)$ die gleichen Konstantheitsintervalle besitzen.

Bezeichnet $\mathbf{T} = (T_t)_{t \geq 0}$ die Rechtsinverse des quadratischen Variationsprozesses $\langle \mathbf{M} \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$, d. h., für jedes $t \geq 0$ ist

$$T_t(\omega) := \inf\{s \geq 0 : \langle M \rangle_s(\omega) > t\} \quad (\omega \in \Omega)\,.$$

Wie wir aus Abschnitt 2.4 bereits wissen, ist $\mathbf{T}$ eine $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}}$-Zeittransformation, und der zeittransformierte Prozeß $\mathbf{M} \circ \mathbf{T} = (M_{T_t})_{t \geq 0}$ ist ein wohldefinierter $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$. Für $t \geq 0$ und $\omega \in \Omega$ sei

$$W_t(\omega) := \begin{cases} M_{T_t}(\omega) - M_0(\omega)\,, & \text{falls} \quad \omega \in N^c\,, \\ 0\,, & \text{falls} \quad \omega \in N\,. \end{cases} \tag{3.1.21}$$

Damit erhalten wir einen $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$-adaptierten reellen stochastischen Prozeß $\mathbf{W} = (W_t)_{t \geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit stetigen Trajektorien, und es gilt

$$W_t = M_{T_t} - M_0\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Also ist $\mathbf{W}$ ununterscheidbar von dem Prozeß ${}^0\mathbf{M} \circ \mathbf{T}$. Der nun nachfolgende Satz beinhaltet eine fundamentale Charakterisierung stetiger lokaler Martingale, wobei noch einmal an die Ausführungen zu Definition 2.3.19 erinnert sei.

Satz 3.1.22 *Mit den obigen Bezeichnungen ist der Prozeß* $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ *eine in* $\langle M\rangle_\infty$ *gestoppte* $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}, \mathbf{P})$*-Brownsche Bewegung über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. *Insbesondere ist* $\langle \mathbf{M}\rangle$ *eine* $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$*-Zeittransformation, und für den* $\mathbf{P}$*-f. s. eindeutig bestimmten Prozeß* $\mathbf{W}$ *gilt*

$$\mathbf{M} = M_0 + \mathbf{W} \circ \langle \mathbf{M}\rangle \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{3.1.23}$$

Für einen $\mathbf{T}$*-stetigen stochastischen Prozeß* $\mathbf{H} = (H_t)_{t\geq 0}$ *aus* $\mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F}^{\mathbf{P}})$ *ist der zeittransformierte Prozeß* $\mathbf{H} \circ \mathbf{T} \in \mathcal{L}^{\langle M\rangle_\infty}(\mathbf{W}, \mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T})$, *und es gilt*

$$(\mathbf{H} \bullet \mathbf{M}) \circ \mathbf{T} = (\mathbf{H} \circ \mathbf{T}) \bullet \mathbf{W} \quad \textit{auf} \quad [\![0, \langle M\rangle_\infty |\!| \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{3.1.24}$$

Beweis: Für einen Beweis dieses Resultats vergleiche man Theorem 9.2.3 in [40] und Theorem 10.19 in [25] sowie die Ausführungen in [15]. □

Den Prozeß $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ aus Satz 3.1.22 bezeichnet man auch oft als *Dambis-Dubins-Schwarz Brownsche Bewegung* oder die zu einem stetigen lokalen Martingal *assoziierte Brownsche Bewegung.*

3.2 Eine Charakterisierung lokaler Martingalmaße

In diesem Abschnitt wollen wir die Elemente aus $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ etwas genauer betrachten und diese mittels Markov-Kerne beschreiben. Ziel soll es dann sein, ein stetiges lokales Martingal, das eine vorgegebene Verteilung aus $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ besitzt, aus einer gegebenen Brownschen Bewegung zu konstruieren. Diese Konstruktion ist dann maßgebend für die Behandlung der stochastischen Differentialgleichung **(1.0.1)**, insbesondere was die Existenz einer Lösung von Gleichung **(1.0.1)** angeht.

Für das Weitere verwenden wir die Notationen aus Abschnitt 3.1. Zusätzlich bezeichne $\mathbb{W}$ das Wiener-Maß auf dem Borelschen Meßraum $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$, also $\mathbb{W}$ ist die Verteilung einer Brownschen Bewegung über einem Wahrscheinlichkeitsraum. Für $t \geq 0$ definieren wir die folgenden σ-Algebren über $C(\mathbb{R}_+)$:

$$\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+)) := \mathcal{F}_t^{\mathbf{Z}} = \{\{\mathbf{Z}^t \in C\} \,:\, C \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))\}\,.$$

Als abgeschlossener Teilraum von $C(\mathbb{R}_+)$ ist E_+ bzgl. der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ ein polnischer Raum. Für die σ-Algebra $\mathfrak{B}(E_+)$ der Borelschen Mengen von E_+ gilt dann

$$\mathfrak{B}(E_+) = \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \cap E_+ = \sigma(\{\,\{\mathbf{a} \in E_+ \,:\, \mathbf{a}(t) \leq s\} \,:\, t, s \in \mathbb{R}_+\})$$

(vgl. beispielsweise Abschnitt 1.4 in [21]). Weiterhin sei für $t \geq 0$

$$\mathcal{D}_t := \sigma(\{\,\{\mathbf{a} \in E_+ \,:\, \mathbf{a}(u) \leq s\} \,:\, u \in \mathbb{R}_+\,,\, 0 \leq s \leq t\}) \subseteq \mathfrak{B}(E_+) \tag{3.2.1}$$

für $t \geq 0$. Dann definiert $\mathbb{D} := (\mathcal{D}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration in $\mathfrak{B}(E_+)$, da für beliebige $0 \leq s < t$ das Erzeugendensystem für $\mathcal{D}_s$ in $\mathcal{D}_t$ enthalten ist.

Mit D bezeichnen wir den Raum der rechtsstetigen Funktionen $\mathbf{x} : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ mit linksseitigem Grenzwert und mit D_+ die Menge der $\overline{\mathbb{R}}_+$-wertigen monoton wachsenden Funktionen aus D. Dabei bezeichnet $\overline{\mathbb{R}}$ die erweiterte Zahlengerade, die aus $\mathbb{R}$ durch Hinzunahme der Punkte $+\infty$ und $-\infty$ entsteht. Man betrachtet den Raum $\overline{\mathbb{R}}$ als Zwei-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$. Für die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ der Borelschen Mengen von $\overline{\mathbb{R}}$ gilt $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\})$ (vgl. hierzu Abschnitt III.4.1 in [10]). Entsprechend ist $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ zu verstehen. Bezüglich der Skorokhod-Metrik werden sowohl D als auch D_+ zu einem polnischen Raum, und für die σ-Algebren $\mathfrak{B}(D)$ bzw. $\mathfrak{B}(D_+)$ der Borelschen Mengen von D bzw. D_+ gilt

$$\mathfrak{B}(D) = \sigma(\{\, \{\mathbf{x} \in D \,:\, \mathbf{x}(t) \in A\} : A \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})\,,\, t \geq 0\})$$

bzw. $\mathfrak{B}(D_+) = \mathfrak{B}(D) \cap D_+$ (vgl. Kapitel VI.1.1 in [28]).

Als nächstes betrachten wir die Abbildung $\varphi : D \times D_+ \to D$ mit

$$\varphi(\mathbf{x}, \alpha)(t) := \begin{cases} \mathbf{x}(\alpha(t))\,, & \text{falls} \quad \alpha(t) < +\infty\,, \\ \limsup\limits_{t \in \mathbb{Q}_+} \mathbf{x}(t)\,, & \text{falls} \quad \alpha(t) = +\infty\,, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

für $(\mathbf{x}, \alpha) \in D \times D_+$ und $t \geq 0$. Beachtet man, daß $\mathfrak{B}(U_1 \times U_2) = \mathfrak{B}(U_1) \otimes \mathfrak{B}(U_2)$ für je zwei polnische Räume U_1 und U_2 gilt, so können wir für φ folgende Meßbarkeitsaussage beweisen.

Satz 3.2.3 *Die gemäß* (3.2.2) *definierte Abbildung* $\varphi : D \times D_+ \to D$ *ist* $\mathfrak{B}(D) \otimes \mathfrak{B}(D_+)$-$\mathfrak{B}(D)$*-meßbar.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß für Elemente B aus dem Erzeugendensystem für die σ-Algebra $\mathfrak{B}(D)$ gilt

$$\{\varphi \in B\} \in \mathfrak{B}(D) \otimes \mathfrak{B}(D_+)\,.$$

Gemäß den vorhergehenden Betrachtungen besitzt jedes Element B aus dem Erzeugendensystem für die σ-Algebra $\mathfrak{B}(D)$ die Darstellung $B = \{\mathbf{x} \in D \,:\, \mathbf{x}(t) \in A\}$ für gewisse $t \geq 0$ und $A \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Somit ist zu zeigen, daß für beliebige $A \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ und $t \geq 0$, was beides wir im nachfolgenden als fixiert annehmen wollen, gilt

$$\{\varphi \in B\} = \{(\mathbf{x}, \alpha) \in D \times D_+ \,:\, \varphi(\mathbf{x}, \alpha)(t) \in A\} \in \mathfrak{B}(D) \otimes \mathfrak{B}(D_+)\,.$$

Zunächst sieht man unmittelbar, daß

$$\begin{aligned} &\{\varphi \in B\} \cap D \times \{\alpha \in D_+ \,:\, \alpha(t) = +\infty\} \\ &\qquad = \{\mathbf{x} \in D \,:\, \limsup_{s \in \mathbb{Q}_+} \mathbf{x}(s) \in A\} \times \{\alpha \in D_+ \,:\, \alpha(t) = +\infty\} \end{aligned}$$

zu $\mathfrak{B}(D) \otimes \mathfrak{B}(D_+)$ gehört. Bleibt uns somit zu zeigen, daß dies auch für die Menge

$$\begin{aligned} &\{\varphi \in B\} \cap D \times \{\alpha \in D_+ \,:\, \alpha(t) < +\infty\} \\ &\qquad = \{(\mathbf{x}, \alpha) \in D \times D_+ \,:\, \mathbf{x}(\alpha(t)) \in A,\, \alpha(t) < +\infty\} \end{aligned}$$

gilt. Dies folgt aber mit der üblichen Argumentation aus der Rechtsstetigkeit von $\mathbf{x}$. Dazu sei $(\mathbf{x}, \alpha) \in D \times D_+$ mit $\alpha(t) < +\infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Größen

$$\varphi_n(\mathbf{x}, \alpha) := \mathbf{x}((k+1)2^{-n}) \quad \text{für} \quad \alpha(t) \in \,]k2^{-n}, (k+1)2^{-n}] \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

sowie $\varphi_n(\mathbf{x}, \alpha) := \mathbf{x}(0)$, falls $\alpha(t) = 0$. Aus der Rechtsstetigkeit von $\mathbf{x}$ folgt dann

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{x}(\alpha(t)) = \varphi(\mathbf{x}, \alpha)(t)\,.$$

Somit ist $\varphi(\,\cdot\,,\cdot\,)(t)$ auf der Menge $D \times \{\alpha \in D_+ \,:\, \alpha(t) < +\infty\}$ punktweiser Limes der Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und es genügt zu zeigen, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$\{\varphi_n \in B\} \,\cap\, D \times \{\alpha \in D_+ \,:\, \alpha(t) < +\infty\}$$

zu $\mathfrak{B}(D) \otimes \mathfrak{B}(D_+)$ gehört. Entsprechend der Konstruktion gilt nun

$$\begin{aligned}
&\{\varphi_n \in B\} \cap D \times \{\alpha \in D_+ : \alpha(t) < +\infty\} \\
&\qquad = \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{x}(0) \in A\} \times \{\alpha \in D_+ : \alpha(t) = 0\} \cup \\
&\qquad\quad \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\{\mathbf{x} \in D : \mathbf{x}((k+1)2^{-n}) \in A\} \times \{\alpha \in D_+ : \alpha(t) \in]k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]\} \right) .
\end{aligned}$$

Nach Definition der σ-Algebren $\mathfrak{B}(D)$ und $\mathfrak{B}(D_+)$ ist aber leicht einzusehen, daß die rechte Seite der obigen Gleichung zu $\mathfrak{B}(D) \otimes \mathfrak{B}(D_+)$ gehört. Mit dem bereits Bewiesenen und da $t \geq 0$ sowie $A \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ beliebig gewählt waren folgt dann hieraus die zu beweisende Meßbarkeit von φ. □

Bemerkung 3.2.4 Ganz analog zeigt man die $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(D_+)$-$\mathfrak{B}(D)$-Meßbarkeit der Abbildung $\varphi : C(\mathbb{R}_+) \times D_+ \to D$. Entsprechend ist auch $\varphi : C(\mathbb{R}_+) \times E_+ \to C(\mathbb{R}_+)$ eine $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(E_+)$-$\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-meßbare Abbildung.

Zum Schluß definieren wir noch folgende Abbildung $\bar{\varphi} : \mathbb{R} \times D \times D_+ \to D$ durch

$$\bar{\varphi}(x_0, \mathbf{x}, \alpha)(t) = x_0 + \varphi(\mathbf{x}, \alpha)(t) \tag{3.2.5}$$

für $(x_0, \mathbf{x}, \alpha) \in \mathbb{R} \times D \times D_+$ und $t \geq 0$. Mit Satz 3.2.3 sieht man unmittelbar, daß auch $\bar{\varphi}$ eine $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(D) \otimes \mathfrak{B}(D_+)$-$\mathfrak{B}(D)$-meßbare Abbildung ist.

Im folgenden wollen wir das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren und beweisen. Für die hierbei verwendeten Begriffe wie Markov-Kerne, bedingte Verteilungen sowie deren Existenz und Eindeutigkeit sei beispielsweise auf §36 sowie §44 in [2] oder Kapitel 5 in [29] verwiesen.

Zunächst wollen wir darauf eingehen, wie man ein stetiges lokales Martingal durch geeignete Erweiterung des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes mittels einer Brownschen Bewegung darstellen kann. Ausgangspunkt hierfür ist ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$. Mit $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ sei die Rechtsinverse des quadratischen Variationsprozesses $\langle \mathbf{M} \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t\geq 0}$ von $\mathbf{M}$ bezeichnet. Weiterhin sei $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ die zu $\mathbf{M}$ assoziierte Brownsche Bewegung aus Satz 3.1.22, d. h., $\mathbf{W}$ ist eine in $\langle M \rangle_\infty$ gestoppte $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit

$$M_t = M_0 + W_{\langle M \rangle_t}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{3.2.6}$$

Wie im Beweis von Satz 3.1.20 konstruieren wir eine $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Brownsche Bewegung $\mathbf{B}^* = (B_t^*)_{t\geq 0}$ über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$, wobei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ in $\tilde{\mathcal{F}}$ eine π-Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$ ist, so daß auf $\tilde{\Omega}$ gilt

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{B}^{*\widetilde{\langle M \rangle}_\infty} . \tag{3.2.7}$$

Über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ ist der stochastische Prozeß $\tilde{\mathbf{M}} = (\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ wegen $\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{\mathbf{M}}} = \mathbf{P}_{\mathbf{M}}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{M}}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal. Für den quadratischen Variationsprozeß $\langle \tilde{\mathbf{M}} \rangle = (\langle \tilde{M} \rangle_t)_{t\geq 0}$ von $\tilde{\mathbf{M}}$ gilt mit Satz 3.1.14

$$\langle \tilde{\mathbf{M}} \rangle = \widetilde{\langle \mathbf{M} \rangle} \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} \tag{3.2.8}$$

Dabei kann $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle$ ohne Einschränkung so gewählt werden, daß es eine $\tilde{\mathbb{F}}^{\tilde{\mathbf{P}}}$-Zeittransformation ist (vgl. Satz 3.1.22). Unter Verwendung von (3.2.5), (3.2.7), (3.2.8) und der Eigenschaft, daß die Trajektorien von $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle$ in E_+ liegen, erhalten wir aus (3.2.6) folgende Darstellung für den Prozeß $\tilde{\mathbf{M}}$:

$$\tilde{M}_t = \tilde{M}_0 + B^*_{\langle\tilde{M}\rangle_t} = \bar{\varphi}(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle)(t), \quad t \geq 0, \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f.s.} \tag{3.2.9}$$

bzw.

$$\tilde{\mathbf{M}} = \bar{\varphi}(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle) \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} \tag{3.2.10}$$

Somit ist das stetige lokale $(\mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{M}}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal $\tilde{\mathbf{M}}$ ununterscheidbar von einem meßbaren Funktional von $\tilde{M}_0$, den Trajektorien einer Brownschen Bewegung $\mathbf{B}^*$ und den Trajektorien seines quadratischen Variationsprozesses $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle$. Für die Verteilung von $\tilde{\mathbf{M}}$, aufgefaßt als Zufallsvariable über $\tilde{\Omega}$, bzw. von $\mathbf{M}$ selbst gilt dann auf $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{\mathbf{M}}} = \tilde{\mathbf{P}}_{(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle)} \circ \bar{\varphi}^{-1} . \tag{3.2.11}$$

Damit haben wir gesehen, wie durch Erweiterung des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes ein stetiges lokales Martingal pfadweise aus einer Brownschen Bewegung gewonnen werden kann und wie sich die Verteilung des zugehörigen Ausgangsprozesses beschreiben läßt. Aus dem Beweis von Satz 3.1.20 ist klar, daß dieses Verfahren der Erweiterung nicht eindeutig ist und es weitaus mehr Wahrscheinlichkeitsräume existieren, so daß (3.2.10) bzw. (3.2.11) für ein gegebenes stetiges lokales Martingal erfüllt ist. Mit den obigen Bezeichnungen wollen wir daher folgenden Begriff einführen

Definition 3.2.12 *Sei* $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ *ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$*-Martingal über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*. Dann heißt* $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$*-Erweiterung jedes Quintupel* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(a) der Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ *mit Filtration* $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ *in* $\tilde{\mathcal{F}}$ *ist eine (*π*-)Erweiterung von* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *und* $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$;

(b) der quadratische Variationsprozeß $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle = (\langle\tilde{M}\rangle_t)_{t\geq 0}$ *des stetigen lokalen* $(\mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{M}}}, \tilde{\mathbf{P}})$*-Martingals* $\tilde{\mathbf{M}}$ *ist eine* $\tilde{\mathbb{F}}^{\tilde{\mathbf{P}}}$*-Zeittransformation;*

(c) $\mathbf{B}^* = (B_t^*)_{t\geq 0}$ *ist eine* $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$*-Brownsche Bewegung über* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$*, so daß gilt*

$$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{M}_0 + \mathbf{B}^* \circ \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle = \bar{\varphi}(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle) \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} \tag{3.2.13}$$

Ist $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ *vollständig, so nennen wir die* $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$*-Erweiterung* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ *vollständig. Sie heißt Standard-*$(\mathbf{M}, \mathbf{P})$*-Erweiterung, falls* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ *das im Beweis von Satz 3.1.20 konstruierte Quintupel ist.*

Wie wir oben bereits gesehen haben, existiert zu jedem stetigen lokalen Martingal solch ein Quintupel, welches die besagten Eigenschaften besitzt. Damit können wir hinsichtlich der Verteilung eines stetigen lokalen Martingals folgendes Resultat formulieren und beweisen.

Satz 3.2.14 *Seien* $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ *ein stetiges lokales* $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$*-Martingal über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *und* $\mu := \mathbf{P}_{M_0}$ *auf* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$*. Dann existiert zu jeder* $(\mathbf{M},\, \mathbf{P})$*-Erweiterung* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}},\, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ *ein von der Erweiterung abhängiger Markov-Kern* $\tilde{K}$ *von* $(\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ *nach* $(E_+, \mathfrak{B}(E_+))$*, welcher* $\mu \otimes \mathbb{W}$*-f. s. eindeutig bestimmt ist, so daß für jedes* $D \in \mathfrak{B}(E_+)$ *gilt*

$$(3.2.15) \qquad \tilde{K}(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, D) = \tilde{\mathbf{P}}(\{\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle \in D\} \,|\, \sigma(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*)) \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.}$$

Insbesondere gilt für jedes $C \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$

$$(3.2.16) \qquad \mathbf{P}_{\mathbf{M}}(C) = \int\limits_{C(\mathbb{R}_+)} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{E_+} \mathrm{I}_{\{\bar{\varphi}\in C\}}(x_0, \mathbf{w}, \mathbf{a})\tilde{K}(x_0, \mathbf{w}, \mathrm{d}\mathbf{a})\Big)\, \mu(\mathrm{d}x_0)\Big)\mathbb{W}(\mathrm{d}\mathbf{w})\,.$$

Beweis: Sei $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}},\, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ eine beliebige $(\mathbf{M},\, \mathbf{P})$-Erweiterung des gegebenen stetigen lokalen $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$-Martingals $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und sei $\mu := \mathbf{P}_{M_0}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Entsprechend unserer Definition und den vorhergehenden Ausführungen gilt (3.2.13). Somit ist das Maß $\mathbf{P}_{\mathbf{M}}$ über $\bar{\varphi}$ vollständig durch die gemeinsame Verteilung des Tripels $(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle)$ bzgl. $\tilde{\mathbf{P}}$ bestimmt (vgl. (3.2.11)). Die Randverteilung von $(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle)$ ist bzgl. der ersten beiden Komponenten gerade das Produktmaß $\mu\otimes\mathbb{W}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Dies folgt zum einen aus $\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{M}_0} = \mathbf{P}_{M_0} = \mu$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ und zum anderen aus der Tatsache, daß $\tilde{M}_0$ als $\tilde{\mathcal{F}}_0$-meßbare Zufallsgröße unabhängig von der $(\tilde{\mathbb{F}},\, \tilde{\mathbf{P}})$-Brownschen Bewegung $\mathbf{B}^*$ ist. Bezüglich der letzten Komponente ist die Randverteilung von $(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle)$ wegen (3.2.8) gerade die Verteilung des quadratischen Variationsprozesses $\langle\mathbf{M}\rangle$ von $\mathbf{M}$.

Die Trajektorien des quadratischen Variationsprozesses $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle = (\langle\tilde{M}\rangle_t)_{t\geq 0}$ nehmen nun Werte in dem polnischen Raum E_+ an. Somit existiert bzgl. der gewählten Erweiterung ein *Markov-Kern* $\tilde{K}$ von $(\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ nach $(E_+, \mathfrak{B}(E_+))$, d. h.,

$$\tilde{K} : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+) \times \mathfrak{B}(E_+) \to [0,1]$$

mit folgenden zwei Eigenschaften:

(K1) für jedes $D \in \mathfrak{B}(E_+)$ ist $(x_0, \mathbf{w}) \mapsto \tilde{K}(x_0, \mathbf{w}, D)$ eine $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-meßbare Abbildung auf $\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+)$;

(K2) für jedes $(x_0, \mathbf{w}) \in \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+)$ ist $D \mapsto \tilde{K}(x_0, \mathbf{w}, D)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Borelschen Meßraum $(E_+, \mathfrak{B}(E_+))$,

so daß für jedes $(x_0, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+)$ das auf $\mathfrak{B}(E_+)$ definierte Wahrscheinlichkeitsmaß $D \mapsto \tilde{K}(x_0, \mathbf{w}, D)$ eine Version der bedingten Verteilung von $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle$ unter der Bedingung $(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*) = (x_0, \mathbf{w})$ ist. Es gilt also

$$(3.2.17) \qquad \tilde{K}(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, D) = \tilde{\mathbf{P}}(\{\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle \in D\} \,|\, \sigma(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*)) \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} \quad (D \in \mathfrak{B}(E_+))\,.$$

Für beliebige $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ sowie $D \in \mathfrak{B}(E_+)$ ist dann

$$(3.2.18) \qquad \tilde{\mathbf{P}}_{(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle)}(\Gamma \times D) = \int\limits_{\Gamma} \tilde{K}(x_0, \mathbf{w}, D)\, \mu \otimes \mathbb{W}(\mathrm{d}(x_0, \mathbf{w}))\,.$$

Insbesondere ist dieser Markov-Kern in folgendem Sinne $\mu \otimes \mathbb{W}$-f. s. eindeutig bestimmt: Ist $\tilde{K}^*$ ein weiterer Markov-Kern von $(\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ nach

$(E_+, \mathfrak{B}(E_+))$, welcher (3.2.17) über der $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ erfüllt. Dann gibt es eine $\mu \otimes \mathbb{W}$-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$, so daß für alle $(x_0, \mathbf{w}) \in N^c$ gilt

(3.2.19) $$\tilde{K}(x_0, \mathbf{w}, D) = \tilde{K}^*(x_0, \mathbf{w}, D) \quad (D \in \mathfrak{B}(E_+)) .$$

Aus (3.2.18) folgt dann zusammen mit (3.2.11) schließlich

(3.2.20) $$\mathbf{P}_{\mathbf{M}}(C) = \int\limits_{C(\mathbb{R}_+)} (\int\limits_{\mathbb{R}} (\int\limits_{E_+} \mathrm{I}_{\{\bar{\varphi} \in C\}}(x_0, \mathbf{w}, a) \tilde{K}(x_0, \mathbf{w}, \mathrm{d}a))\, \mu(\mathrm{d}x_0)) \mathbb{W}(\mathrm{d}\mathbf{w})$$

für $C \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Als nächstes ist zu zeigen, daß der Markov-Kern aus Satz 3.2.14 unabhängig von der gewählten Erweiterung ist und somit jede $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung bis auf eine $\mu \otimes \mathbb{W}$-Nullmenge stets den gleichen Markov-Kern liefert. Zuvor wollen wir noch folgende wichtige Meßbarkeitsaussage für den gefundenen Markov-Kern beweisen.

Satz 3.2.21 *Für den Markov-Kern $\tilde{K}$ aus Satz 3.2.14 ist für jedes $t \geq 0$ und $D \in \mathcal{D}_t$ die Abbildung*

(3.2.22) $$\tilde{K}(\,\cdot\,, \,\cdot\,, D) : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+) \to [0, 1]$$

$\overline{\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mu \otimes \mathbb{W}}$*-meßbar (vgl.* (2.1.1)*).*

Beweis: Sei $t \geq 0$ beliebig, aber fest gewählt. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ sowie die Prozesse $\tilde{\mathbf{M}}$, $\langle \tilde{\mathbf{M}} \rangle$ und $\mathbf{B}^*$ aus dem Beweis von Satz 3.2.14. Weiterhin betrachten wir die beiden meßbaren Abbildungen

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{M}} \rangle &: (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) \to (E_+, \mathfrak{B}(E_+)) , \\ (\tilde{M}_0, \mathbf{B}^{*t}) &: (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) \to (\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))) , \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{B}^{*t} = (B^*_{s \wedge t})_{s \geq 0}$ die in t gestoppte Brownsche Bewegung $\mathbf{B}^*$ bezeichnet. Da E_+ ein polnischer Raum ist, existiert ein Markov-Kern $\tilde{K}_t$ von $(\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+)))$ nach $(E_+, \mathfrak{B}(E_+))$, so daß für jedes $(x_0, \mathbf{w}) \in \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+)$ das Wahrscheinlichkeitsmaß $D \mapsto \tilde{K}_t(x_0, \mathbf{w}, D)$ auf $\mathfrak{B}(E_+)$ eine Version der bedingten Verteilung von $\langle \tilde{\mathbf{M}} \rangle$ unter der Bedingung $(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^{*t}) = (x_0, \mathbf{w})$ ist. Somit gilt für $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$ und $D \in \mathfrak{B}(E_+)$

(3.2.23) $$\tilde{\mathbf{P}}_{(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^{*t}, \langle \tilde{\mathbf{M}} \rangle)}(\Gamma \times D) = \int\limits_{\Gamma} \tilde{K}_t(x_0, \mathbf{w}, D)\ \tilde{\mathbf{P}}_{(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^{*t})}(\mathrm{d}(x_0, \mathbf{w})) .$$

Für $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$ ist nun

(3.2.24) $$\{(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^{*t}) \in \Gamma\} = \{(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*) \in \Gamma\} .$$

Die Richtigkeit von (3.2.24) zeigt man zunächst für Mengen Γ, die Elemente des Erzeugendensystems für die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$ sind. Das System aller Mengen Γ aus $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$ mit der Eigenschaft (3.2.24) bildet eine σ-Algebra über $\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+)$, welche das Erzeugendensystem für die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$

enthält. Hieraus folgt dann aber unmittelbar die Gültigkeit von (3.2.24) für alle Mengen Γ aus $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$.

Wegen der Unabhängigkeit der $\tilde{\mathcal{F}}_0$-meßbaren Zufallsgröße $\tilde{M}_0$ von der $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Brownschen Bewegung $\mathbf{B}^*$ erhalten wir mit (3.2.18), (3.2.23) sowie (3.2.24) die Beziehung

$$(3.2.25) \qquad \int_\Gamma \tilde{K}_t(x_0, \mathbf{w}, D)\, \mu \otimes \mathbb{W}(\mathrm{d}(x_0, \mathbf{w})) = \int_\Gamma \tilde{K}(x_0, \mathbf{w}, D)\, \mu \otimes \mathbb{W}(\mathrm{d}(x_0, \mathbf{w}))$$

für alle $D \in \mathfrak{B}(E_+)$ und beliebige $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$. Die Behauptung des Satzes ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß für jedes $D \in \mathcal{D}_t \subseteq \mathfrak{B}(E_+)$ Beziehung (3.2.25) für alle $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ richtig ist. Hieraus folgt dann für alle $D \in \mathcal{D}_t$ unter Verwendung des Satzes über die Eindeutigkeit der Radon-Nikodýmschen Dichte die Gleichheit

$$(3.2.26) \qquad \tilde{K}_t(\,\cdot\,,\,\cdot\,, D) = \tilde{K}(\,\cdot\,,\,\cdot\,, D) \quad \mu \otimes \mathbb{W}\text{-f. s.}$$

(vgl. Satz VII.2.3 in [10]). Aus der $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$-Meßbarkeit der auf $\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+)$ definierten Abbildung $(x_0, \mathbf{w}) \mapsto \tilde{K}_t(x_0, \mathbf{w}, D)$ folgt dann unmittelbar die Behauptung des Satzes.

Sei nun ein $D \in \mathcal{D}_t$ beliebig gegeben. Um (3.2.25) für alle $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ zu beweisen, genügt es, (3.2.25) für alle Elemente Γ aus einem durchschnittsstabilen Erzeugendensystem für die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ zu zeigen. Dazu betrachten wir folgendes Mengensystem

$$\mathcal{C}_t := \{\, \{\psi_t \in C_1\} \cap \{\theta_t \in C_2\} \,:\, C_1, C_2 \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \,\}\,.$$

Dabei sind ψ_t und θ_t Abbildungen von $C(\mathbb{R}_+)$ nach $C(\mathbb{R}_+)$ mit

$$\psi_t(\mathbf{w})(s) := \mathbf{w}(s \wedge t) \quad \text{und} \quad \theta_t(\mathbf{w})(s) := \mathbf{w}(t+s) - \mathbf{w}(t)$$

für $\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)$ und $s \geq 0$. Man kann leicht zeigen, daß $\mathcal{C}_t$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für die σ-Algebra $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ mit $C(\mathbb{R}_+) \in \mathcal{C}_t$ ist. Somit wird die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ von dem Mengensystem

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_t = \{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \,:\, \Gamma_1 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\, \Gamma_2 \in \mathcal{C}_t\}$$

erzeugt. Dieses System ist dann ebenfalls durchschnittsstabil und enthält die Menge $\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+)$.

Sei nun $\Gamma := \Gamma_1 \times \Gamma_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_t$ mit $\Gamma_1 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ und $\Gamma_2 = \{\psi_t \in C_1\} \cap \{\theta_t \in C_2\}$ für zwei Mengen C_1 und C_2 aus $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Nach Definition ist ψ_t eine $\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-meßbare Abbildung, und somit ist $\{\psi_t \in C_1\} \in \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$. Des weiteren ist θ_t eine $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-meßbare Abbildung und bzgl. des Wiener-Maßes $\mathbb{W}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ ist θ_t unabhängig von der σ-Algebra $\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$. Letzteres folgt aus der Unabhängigkeit der Zuwächse der Brownschen Bewegung (vgl. dazu die Eigenschaft (B2) auf Seite 19). Zusammen mit der $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$-Meßbarkeit der auf $\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+)$ definierten Abbildung $(x_0, \mathbf{w}) \mapsto \tilde{K}_t(x_0, \mathbf{w}, D)$ folgt mit dem Satz von Fubini zunächst

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \tilde{K}_t(x_0, \mathbf{w}, D)\, \mu \otimes \mathbb{W}(\mathrm{d}(x_0, \mathbf{w})) &= \int_{\Gamma_1} \mathbb{E}_{\mathbb{W}}(\tilde{K}_t(x_0,\,\cdot\,, D)\, \mathrm{I}_{\Gamma_2})\, \mu(\mathrm{d}x_0) \\ &= \int_{\Gamma_1} \mathbb{E}_{\mathbb{W}}(\tilde{K}_t(x_0,\,\cdot\,, D)\, \mathrm{I}_{\{\psi_t \in C_1\}} \mathrm{I}_{\{\theta_t \in C_2\}})\, \mu(\mathrm{d}x_0)\,.\end{aligned}$$

Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\mathbf{w} \mapsto \tilde{K}_t(x_0, \mathbf{w}, D)$ entsprechend der Konstruktion $\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$-meßbar. Mit den obigen Bemerkungen geht die letzte Gleichung somit über in

$$\int\limits_{\Gamma} \tilde{K}_t(x_0, \mathbf{w}, D)\, \mu \otimes \mathbb{W}(\mathrm{d}(x_0, \mathbf{w})) = \Big(\int\limits_{\Gamma_1} \mathbb{E}_{\mathbb{W}}(\tilde{K}_t(x_0, \,\cdot\,, D)\, \mathrm{I}_{\{\psi_t \in C_1\}})\, \mu(\mathrm{d}x_0)\Big)\, \mathbb{E}_{\mathbb{W}}(\mathrm{I}_{\{\theta_t \in C_2\}})\,.$$

Mit $\mu = \tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{M}_0}$ und $\mathbb{W} = \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{B}^*}$ erhalten wir hieraus unter Verwendung von (3.2.25) zusammen mit (3.2.18)

$$\int\limits_{\Gamma} \tilde{K}_t(x_0, \mathbf{w}, D)\, \mu \otimes \mathbb{W}(\mathrm{d}(x_0, \mathbf{w})) = \tilde{\mathbf{P}}(\{\tilde{M}_0 \in \Gamma_1, \psi_t(\mathbf{B}^*) \in C_1, \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle \in D\}) \\ \times \tilde{\mathbf{P}}(\{\theta_t(\mathbf{B}^*) \in C_2\})\,.$$

Nun ist $\mathbf{B}^*$ sowohl eine $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$- als auch eine $(\tilde{\mathbb{F}}^{\tilde{\mathbf{P}}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Brownsche Bewegung, woraus die Unabhängigkeit von $\theta_t(\tilde{\mathbf{B}})$ und $\tilde{\mathcal{F}}_t^{\tilde{\mathbf{P}}}$ bzgl. $\tilde{\mathbf{P}}$ folgt. Des weiteren gehört die Menge $\{\tilde{M}_0 \in \Gamma_1, \psi_t(\mathbf{B}^*) \in C_1, \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle \in D\}$ zu $\tilde{\mathcal{F}}_t^{\tilde{\mathbf{P}}}$, da $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle$ nach Definition eine $\tilde{\mathbb{F}}^{\tilde{\mathbf{P}}}$-Zeittransformation ist. Also ist

$$\int\limits_{\Gamma} \tilde{K}_t(x_0, \mathbf{w}, D)\, \mu\otimes\mathbb{W}(\mathrm{d}(x_0, \mathbf{w})) = \tilde{\mathbf{P}}(\{\tilde{M}_0 \in \Gamma_1, \psi_t(\mathbf{B}^*) \in C_1, \theta_t(\mathbf{B}^*) \in C_2, \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle \in D\})\,.$$

Aus der Definition von Γ bzw. Γ_2 erhalten wir unter Beachtung von (3.2.18) schließlich

$$\int\limits_{\Gamma} \tilde{K}_t(x_0, \mathbf{w}, D)\, \mu \otimes \mathbb{W}(\mathrm{d}(x_0, \mathbf{w})) = \int\limits_{\Gamma} \tilde{K}(x_0, \mathbf{w}, D)\, \mu \otimes \mathbb{W}(\mathrm{d}(x_0, \mathbf{w}))\,.$$

Somit haben wir (3.2.25) für beliebige Elemente Γ aus $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_t$ gezeigt. Wie wir oben bereits ausgeführt haben, ist $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_t$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$, welches die Menge $\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+)$ enthält. Aus dem Eindeutigkeitssatz der Maßtheorie folgt dann aber unmittelbar, daß bei festem $D \in \mathcal{D}_t$ Gleichung (3.2.25) für beliebige $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ erfüllt ist, was aber gerade zu zeigen war. $\square$

Als nächstes wollen wir zeigen, daß der Markov-Kern aus Satz 3.2.14 unabhängig von der gewählten Erweiterung ist.

Satz 3.2.27 *Seien $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mu := \mathbf{P}_{M_0}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Für $i \in \{1, 2\}$ bezeichne $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i, \mathbb{F}^i, \mathbf{B}^{i*})$ eine $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung und K^i sei der Markov-Kern aus Satz 3.2.14. Dann gilt*

$$K^1(\,\cdot\,, \,\cdot\,, D) = K^2(\,\cdot\,, \,\cdot\,, D) \quad \textit{für alle} \quad D \in \mathfrak{B}(E_+) \quad \mu \otimes \mathbb{W}\text{-}\textit{f. s.}$$

Beweis: Seien $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \mathbf{P}^1, \mathbb{F}^1, \mathbf{B}^{1*})$ und $(\Omega^2, \mathcal{F}^2, \mathbf{P}^2, \mathbb{F}^2, \mathbf{B}^{2*})$ zwei beliebige $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterungen des gegebenen stetigen lokalen $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingals $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $\mu := \mathbf{P}_{M_0}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Bezeichne $\mathbf{M}^i = (M_t^i)_{t\geq 0}$ für $i = 1, 2$ den stochastischen Prozeß über $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i)$, der durch Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ aus $\mathbf{M}$ hervorgeht (vgl. Definition 3.1.12 (iii)). Wegen

$$\mathbf{P}^i_{\mathbf{M}^i} = \mathbf{P}_{\mathbf{M}} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \tag{3.2.28}$$

ist $\mathbf{M}^i$ nach Satz 3.1.2 ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}^i}, \mathbf{P}^i)$-Martingal über der Erweiterung $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i)$ für $i = 1, 2$. Nach Voraussetzung gilt für jedes $D \in \mathfrak{B}(E_+)$

$$K^i(M_0^i, \mathbf{B}^{i*}, D) = \mathbf{P}^i(\{\langle \mathbf{M}^i \rangle \in D\} \mid \sigma(M_0^i, \mathbf{B}^{i*})) \quad \mathbf{P}^i\text{-f. s.} \quad (i = 1, 2)\,, \tag{3.2.29}$$

wobei K^i ein Markov-Kern von $(\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ nach $(E_+, \mathfrak{B}(E_+))$ ist. Gemäß der Definition der $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung gilt weiterhin für $i = 1, 2$ (vgl. (3.2.13))

$$B^{i*}_{t \wedge \langle M^i \rangle_\infty} = M^i_{T^i_t} - M^i_0\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}^i\text{-f. s.}\,, \tag{3.2.30}$$

wobei $\mathbf{T}^i = (T^i_t)_{t \geq 0}$ die Rechtsinverse von $\langle \mathbf{M}^i \rangle = (\langle M^i \rangle_t)_{t \geq 0}$ bezeichnet.

Es ist nun zu zeigen, daß auf $\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+)$ gilt

$$K^1(\,\cdot\,, \,\cdot\,, D) = K^2(\,\cdot\,, \,\cdot\,, D) \quad \text{für alle} \quad D \in \mathfrak{B}(E_+) \quad \mu \otimes \mathbb{W}\text{-f. s.} \tag{3.2.31}$$

Aus (3.2.29) erhalten wir für $i = 1, 2$ zunächst die Beziehung

$$\mathbf{P}^i_{(M_0^i, \mathbf{B}^{i*}, \langle \mathbf{M}^i \rangle)}(\Gamma \times D) = \int\limits_\Gamma K^i(x_0, \mathbf{w}, D)\, \mu \otimes \mathbb{W}(\mathrm{d}(x_0, \mathbf{w})) \tag{3.2.32}$$

für alle $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ und $D \in \mathfrak{B}(E_+)$. Um nun (3.2.31) zu beweisen, genügt es,

$$\mathbf{P}^1_{(M_0^1, \mathbf{B}^{1*}, \langle \mathbf{M}^1 \rangle)} = \mathbf{P}^2_{(M_0^2, \mathbf{B}^{2*}, \langle \mathbf{M}^2 \rangle)} \tag{3.2.33}$$

auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(E_+)$ zu zeigen. Mit (3.2.32) folgt dann hieraus unter Verwendung der Eindeutigkeit der Radon-Nikodýmschen Dichte

$$K^1(\,\cdot\,, \,\cdot\,, D) = K^2(\,\cdot\,, \,\cdot\,, D) \quad \mu \otimes \mathbb{W}\text{-f. s.} \quad \text{für alle} \quad D \in \mathfrak{B}(E_+)\,. \tag{3.2.34}$$

Dabei hat man zu beachten, daß die beiden auf $\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+)$ definierten Abbildungen $K^1(\,\cdot\,, \,\cdot\,, D)$ bzw. $K^2(\,\cdot\,, \,\cdot\,, D)$ für alle $D \in \mathfrak{B}(E_+)$ meßbar bzgl. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ sind. Darüber hinaus ist der Raum E_+ bzgl. der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ polnisch. Somit besitzt die σ-Algebra $\mathfrak{B}(E_+)$ einen abzählbaren Erzeuger, woraus wir mit (3.2.34) schließlich die zu beweisende Gleichheit (3.2.31) erhalten.

Die Gültigkeit von (3.2.33) ergibt sich aus (3.2.29) und (3.2.30) wie folgt: Aus Folgerung 3.1.8 erhalten wir wegen der für $i = 1, 2$ gültigen Beziehungen (3.2.28) zunächst auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(E_+)$ die Gleichheit der Verteilungen

$$\mathbf{P}^1_{(\mathbf{M}^1, \langle \mathbf{M}^1 \rangle)} = \mathbf{P}_{(\mathbf{M}, \langle \mathbf{M} \rangle)} = \mathbf{P}^2_{(\mathbf{M}^2, \langle \mathbf{M}^2 \rangle)}\,. \tag{3.2.35}$$

Für die folgenden Ausführungen sei zunächst $i \in \{1, 2\}$ fest, aber beliebig. Auf E_+ definieren wir eine Abbildung Ψ mit Werten in D_+ durch

$$\Psi_t(\mathbf{a}) := \inf\{s \geq 0 \,:\, \mathbf{a}(s) > t\} \quad \text{für} \quad \mathbf{a} \in E_+\,,\, t \geq 0\,.$$

Es ist nicht schwierig zu zeigen, daß $\Psi = (\Psi_t)_{t \geq 0}$ an die Filtration $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t \geq 0}$ adaptiert ist, wobei dies aus der Definition der σ-Algebra $\mathcal{D}_t$ für $t \geq 0$ folgt (vgl. (3.2.1)). Dabei hat man nur zu beachten, daß der Koordinatenprozeß auf $C(\mathbb{R}_+)$ eingeschränkt auf E_+ eine $\mathbb{D}$-Zeittransformation ist. Des weiteren ist D_+ bzgl. der Skorokhod-Metrik ein polnischer Raum, und für die σ-Algebra $\mathfrak{B}(D_+)$ seiner Borelschen Mengen gilt

$$\mathfrak{B}(D_+) = \sigma(\,\{\,\{\psi \in D_+ \,:\, \psi(s) < t\} \,:\, s\,, t \geq 0\}\,)$$

(vgl. Theorem VI.1.14 in [28]). Somit ist Ψ eine $\mathfrak{B}(E_+)$-$\mathfrak{B}(D_+)$-meßbare Abbildung von E_+ nach D_+, und es gilt auf Ω^i

$$\mathbf{T}^i = \Psi(\langle \mathbf{M}^i \rangle)\,.$$

Unter Verwendung von (3.2.5) geht somit Gleichung (3.2.30) über in

$$B^{i*}_{t\wedge\langle M^i\rangle_\infty} = \bar{\varphi}(-M^i_0, \mathbf{M}^i, \Psi(\langle \mathbf{M}^i \rangle))(t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}^i\text{-f. s.} \tag{3.2.36}$$

Für $(\mathbf{w}, \mathbf{a}) \in C(\mathbb{R}_+) \times E_+$ sei

$$\bar{\varphi}_\Psi(\mathbf{w}, \mathbf{a}) := \bar{\varphi}(-\mathbf{w}(0), \mathbf{w}, \Psi(\mathbf{a}))\,.$$

Dann ist $\bar{\varphi}_\Psi : C(\mathbb{R}_+) \times E_+ \to D$ eine $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(E_+)$-$\mathfrak{B}(D)$-meßbare Abbildung. Mit (3.2.36) erhalten wir

$$B^{i*}_{t\wedge\langle M^i\rangle_\infty} = \bar{\varphi}_\Psi(\mathbf{M}^i, \langle \mathbf{M}^i \rangle)(t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}^i\text{-f. s.} \tag{3.2.37}$$

bzw.

$$\mathbf{B}^{i*\langle M^i\rangle_\infty} = \bar{\varphi}_\Psi(\mathbf{M}^i, \langle \mathbf{M}^i \rangle) \quad \mathbf{P}^i\text{-f. s.} \tag{3.2.38}$$

Damit ist die rechte Seite von (3.2.36) bzw. (3.2.38) ein meßbares Funktional des Paares $(\mathbf{M}^i, \langle \mathbf{M}^i \rangle)$.

Ziel ist es nun, die $(\mathbb{F}^i, \mathbf{P}^i)$-Brownsche Bewegung $\mathbf{B}^{i*}$ durch die beiden Prozesse $\mathbf{M}^i$ und $\langle \mathbf{M}^i \rangle$ zu beschreiben. Dazu betrachten wir für $t \geq 0$ die folgende Zerlegung von B^{i*}_t auf Ω^i

$$\begin{aligned} B^{i*}_t &= B^{i*}_{t\wedge\langle M^i\rangle_\infty} + (B^{i*}_t - B^{i*}_{t\wedge\langle M^i\rangle_\infty}) \\ &= B^{i*}_{t\wedge\langle M^i\rangle_\infty} + (B^{i*}_{\langle M^i\rangle_\infty + (t-\langle M^i\rangle_\infty)} - B^{i*}_{\langle M^i\rangle_\infty})\, \mathrm{I}_{\{\langle M^i\rangle_\infty \leq t\}}\,, \end{aligned}$$

und setzen

$$\hat{B}^{i*}_t := (B^{i*}_{\langle M^i\rangle_\infty + t} - B^{i*}_{\langle M^i\rangle_\infty})\, \mathrm{I}_{\{\langle M^i\rangle_\infty < +\infty\}}\,.$$

Dann gilt auf Ω^i für $t \geq 0$

$$B^{i*}_t = B^{i*}_{t\wedge\langle M^i\rangle_\infty} + \hat{B}^{i*}_{(t-\langle M^i\rangle_\infty)\vee 0}\,. \tag{3.2.39}$$

Wir betrachten nun zwei Fälle:

1. Fall: $\mathbf{P}(\{\langle M\rangle_\infty = +\infty\}) = 1$.

Aus (3.2.28) zusammen mit (3.2.35) folgt hieraus zunächst $\mathbf{P}^i(\{\langle M^i\rangle_\infty = +\infty\}) = 1$. Gleichung (3.2.39) reduziert sich dann auf Ω^i zu

$$B^{i*}_t = B^{i*}_{t\wedge\langle M^i\rangle_\infty}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}^i\text{-f. s.}$$

Gemeinsam mit (3.2.37) bzw. (3.2.38) erhalten wir hieraus die Beziehung

$$(M^i_0, \mathbf{B}^{i*}, \langle \mathbf{M}^i \rangle) = (M^i_0, \bar{\varphi}_\Psi(\mathbf{M}^i, \langle \mathbf{M}^i \rangle), \langle \mathbf{M}^i \rangle) \quad \mathbf{P}^i\text{-f. s.} \tag{3.2.40}$$

Somit ist die rechte Seite von (3.2.40) ein meßbares Funktional des Paares $(\mathbf{M}^i, \langle \mathbf{M}^i \rangle)$. Aus (3.2.35) folgt schließlich die Richtigkeit von (3.2.33) auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(E_+)$.

2. Fall: $\mathbf{P}(\{\langle M\rangle_\infty < +\infty\}) > 0$.

Aus (3.2.28) und (3.2.35) folgt wiederum $\mathbf{P}^i(\{\langle M^i\rangle < +\infty\}) > 0$. Nach Definition ist $\langle M^i\rangle_\infty$ eine $\mathbb{F}^{i\,\mathbf{P}^i}$-Stoppzeit. Mit der starken Markov-Eigenschaft der Brownschen Bewegung erhalten wir zunächst, daß der Prozeß $\hat{\mathbf{B}}^{i*} = (\hat{B}^{i*}_t)_{t\geq 0}$ eine $(\mathbb{G}^i, \hat{\mathbf{P}}^i)$-Brownsche Bewegung über dem Spurwahrscheinlichkeitsraum $(\hat{\Omega}^i, \hat{\mathcal{F}}^i, \hat{\mathbf{P}}^i)$ mit

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}^i &:= \Omega^i \cap \{\langle M^i\rangle_\infty < +\infty\}\,,\\ \hat{\mathcal{F}}^i &:= \mathcal{F}^{i\,\mathbf{P}^i} \cap \{\langle M^i\rangle_\infty < +\infty\}\,,\\ \hat{\mathbf{P}}^i &:= \mathbf{P}^i(\,\cdot \mid \{\langle M^i\rangle_\infty < +\infty\})\end{aligned}$$

ist, wobei für die Filtration $\mathbb{G}^i = (\mathcal{G}^i_t)_{t\geq 0}$ in $\hat{\mathcal{F}}^i$ wir $\mathcal{G}^i_t := \mathcal{F}^{i\,\mathbf{P}^i}_{\langle M^i\rangle_\infty + t} \cap \{\langle M^i\rangle_\infty < +\infty\}$ für $t \geq 0$ setzen. Insbesondere sind bzgl. des bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßes $\hat{\mathbf{P}}^i$ die Elemente aus der σ-Algebra $\mathcal{G}^{i\,\hat{\mathbf{P}}^i}_0$ unabhängig von $\hat{\mathbf{B}}^{i*}$ (vgl. hierzu auch Satz 50.10 in [2] sowie Proposition 9.1.9 und Lemma 9.1.10 in [40]).

Mit (3.2.35) erhalten wir auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(E_+)$ unmittelbar die Beziehung

$$\hat{\mathbf{P}}^1_{(\mathbf{M}^1, \langle \mathbf{M}^1\rangle)} = \hat{\mathbf{P}}^2_{(\mathbf{M}^2, \langle \mathbf{M}^2\rangle)}\,. \tag{3.2.41}$$

Der quadratische Variationsprozeß $\langle \mathbf{M}^i\rangle$ ist nun verstanden als Abbildung von Ω^i nach E_+ eine $\mathcal{F}^{i\,\mathbf{P}^i}_{\langle M^i\rangle_\infty}$-$\mathfrak{B}(E_+)$-meßbare Abbildung. Dies folgt aus der Eigenschaft, daß $\langle \mathbf{M}^i\rangle$ eine $\mathbb{F}^{i\,\mathbf{P}^i}$-Zeittransformation ist. Des weiteren ist M^i_0 ebenfalls $\mathcal{F}^{i\,\mathbf{P}^i}_{\langle M^i\rangle_\infty}$-meßbar, was aus der Definition der Erweiterung folgt. Wegen

$$\mathbf{M}^i = M^i_0 + \mathbf{B}^{i*} \circ \langle \mathbf{M}^i\rangle \quad \mathbf{P}^i\text{-f. s.}\,,$$

erhalten wir somit, daß der Prozeß $\mathbf{M}^i$ ununterscheidbar von einem $\mathbb{F}^{i\,\mathbf{P}^i} \circ \langle \mathbf{M}^i\rangle$-adaptierten Prozeß über $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i)$ ist. Also ist $\mathbf{M}^i$ eine $\bar{\mathcal{F}}^i$-$\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-meßbare Abbildung von Ω^i nach $C(\mathbb{R}_+)$, wobei $\bar{\mathcal{F}}^i$ die Vervollständigung von $\mathcal{F}^i_{\langle M^i\rangle_\infty}$ bzgl. $\mathbf{P}^i$ bezeichnet. Insgesamt erhalten wir schließlich aus den vorangegangenen Betrachtungen, daß bzgl. $\hat{\mathbf{P}}^i$ sowohl $\mathbf{M}^i$ als auch $\langle \mathbf{M}^i\rangle$ verstanden als Zufallsvariablen über $\hat{\Omega}^i$ unabhängig von $\hat{\mathbf{B}}^{i*}$ sind.

Nun betrachten wir auf $\hat{\Omega}^i$ den Prozeß $\hat{\mathbf{T}}^i = (\hat{T}^i_t)_{t\geq 0}$ mit $\hat{T}^i_t := (t - \langle M^i\rangle_\infty) \vee 0$ für $t \geq 0$. Für $\mathbf{a} \in E_+$ definieren wir folgende $\mathfrak{B}(E_+)$-$\mathfrak{B}(E_+)$-meßbare Abbildung $\Xi : E_+ \to E_+$ mit

$$\Xi_t(\mathbf{a}) := (t - \mathbf{a}(\infty)) \vee 0 \quad (t \geq 0)\,,$$

wobei $\mathbf{a}(\infty) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(n)$ gesetzt wird. Damit gilt $\hat{\mathbf{T}}^i = \Xi(\langle \mathbf{M}^i\rangle)$ auf $\hat{\Omega}^i$, und man sieht leicht, daß $\hat{\mathbf{T}}^i$ eine endliche $\mathbb{G}^i$-Zeittransformation mit Trajektorien in E_+ ist. Für beliebige $t \geq 0$ und $s \geq 0$ gilt nämlich

$$\{\hat{T}^i_t \leq s\} = \{\langle M^i\rangle_\infty + s \geq t\} \in \mathcal{G}^i_s\,. \tag{3.2.42}$$

Man hat hier lediglich zu berücksichtigen, daß $\langle M^i\rangle_\infty$ eine $\mathbb{F}^{i\,\mathbf{P}^i}$-Stoppzeit über Ω^i ist. Somit macht der zeittransformierte Prozeß $\hat{\mathbf{B}}^{i*} \circ \hat{\mathbf{T}}^i = (\hat{B}^{i*}_{\hat{T}^i_t})_{t\geq 0}$ über $\hat{\Omega}^i$ einen Sinn. Dieser ist insbesondere meßbar und nach Satz 2.4.8 (a) sogar ein stetiges lokales $(\mathbb{G}^{i\,\mathbf{P}^i} \circ \hat{\mathbf{T}}^i, \hat{\mathbf{P}}^i)$-Martingal über $(\hat{\Omega}^i, \hat{\mathcal{F}}^i, \hat{\mathbf{P}}^i)$.

Damit können wir nun den Beweis für den 2. Fall abschließen. Für ein beliebiges Element G aus der σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(E_+)$ gilt zunächst mit (3.2.39)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^i_{(M_0^i,\mathbf{B}^{i*},\langle\mathbf{M}^i\rangle)}(G) = &\underbrace{\mathbf{P}^i(\{(M_0^i,\mathbf{B}^{i*\langle M^i\rangle_\infty},\langle\mathbf{M}^i\rangle) \in G, \langle M^i\rangle_\infty = +\infty\})}_{=:p_1^i(G)}\\ &+ \underbrace{\mathbf{P}^i(\{(M_0^i,\mathbf{B}^{i*\langle M^i\rangle_\infty} + \hat{\mathbf{B}}^{i*}\circ\hat{\mathbf{T}}^i,\langle\mathbf{M}^i\rangle) \in G, \langle M^i\rangle_\infty < +\infty\})}_{=:p_2^i(G)}\,.\end{aligned}$$

Für den ersten Summanden $p_1^i(G)$ erhalten wir mit den zuvor eingeführten Bezeichnungen und meßbaren Funktionen

$$\begin{aligned}p_1^i(G) = &\ \mathbf{P}^i(\{(M_0^i,\bar\varphi_\Psi(\mathbf{M}^i,\langle\mathbf{M}^i\rangle),\langle\mathbf{M}^i\rangle) \in G, \langle M^i\rangle_\infty = +\infty\})\\ = &\ \mathbf{P}^i_{(\mathbf{M}^i,\langle\mathbf{M}^i\rangle)}(\{(\mathbf{w},\mathbf{a}) \in C(\mathbb{R}_+)\times E_+ \,:\, (\mathbf{w}(0),\bar\varphi_\Psi(\mathbf{w},\mathbf{a}),\mathbf{a}) \in G, \mathbf{a}(\infty) = +\infty\})\,.\end{aligned}$$

Der zweite Summand $p_2^i(G)$ geht mit $\bar{C} := C(\mathbb{R}_+)\times E_+\times C(\mathbb{R}_+)$ und der Definition von $\hat{\mathbf{P}}^i$ über in

$$\begin{aligned}p_2^i(G) &= \hat{\mathbf{P}}^i(\{(M_0^i,\bar\varphi_\Psi(\mathbf{M}^i,\langle\mathbf{M}^i\rangle) + \varphi(\hat{\mathbf{B}}^{i*},\Xi(\langle\mathbf{M}^i\rangle)),\langle\mathbf{M}^i\rangle) \in G\})\ \mathbf{P}^i(\{\langle M^i\rangle_\infty < +\infty\})\\ &= \hat{\mathbf{P}}^i_{(\mathbf{M}^i,\langle\mathbf{M}^i\rangle,\hat{\mathbf{B}}^{i*})}(\{(\mathbf{w},\mathbf{a},\hat{\mathbf{w}}) \in \bar{C} \,:\, (\mathbf{w}(0),\bar\varphi_\Psi(\mathbf{w},\mathbf{a}) + \varphi(\hat{\mathbf{w}},\Xi(\mathbf{a})),\mathbf{a}) \in G\})\\ &\quad\times\ \mathbf{P}^i_{\langle\mathbf{M}^i\rangle}(\{\mathbf{a} \in E_+ \,:\, \mathbf{a}(\infty) < +\infty\})\,.\end{aligned}$$

Wegen der besagten Unabhängigkeit von $(\mathbf{M}^i,\langle\mathbf{M}^i\rangle)$ und $\hat{\mathbf{B}}^{i*}$ bzgl. $\hat{\mathbf{P}}^i$ erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned}p_2^i(G) = &\ \hat{\mathbf{P}}_{(\mathbf{M}^i,\langle\mathbf{M}^i\rangle)} \otimes \hat{\mathbf{P}}^i_{\hat{\mathbf{B}}^{i*}}(\{(\mathbf{w},\mathbf{a},\hat{\mathbf{w}}) \in \bar{C} \,:\, (\mathbf{w}(0),\bar\varphi_\Psi(\mathbf{w},\mathbf{a}) + \varphi(\hat{\mathbf{w}},\Xi(\mathbf{a})),\mathbf{a}) \in G\})\\ &\times\ \mathbf{P}^i_{\langle\mathbf{M}^i\rangle}(\{\mathbf{a} \in E_+ \,:\, \mathbf{a}(\infty) < +\infty\})\,.\end{aligned}$$

Nun ist $\hat{\mathbf{P}}^i_{\hat{\mathbf{B}}^{i*}} = \mathbb{W}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Aus (3.2.28) sowie (3.2.41) folgt somit

$$p_1^1(G) = p_1^2(G) \quad \text{und} \quad p_2^1(G) = p_2^2(G)\,.$$

Damit haben wir aber wegen

$$\mathbf{P}^i_{(M_0^i,\mathbf{B}^{i*},\langle\mathbf{M}^i\rangle)} = p_1^i + p_2^i \quad \text{auf} \quad \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(E_+)$$

die Richtigkeit von (3.2.33) auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})\otimes\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))\otimes\mathfrak{B}(E_+)$ auch für den 2. Fall gezeigt. □

Zusammengefaßt erhalten wir nun folgende zentrale Aussage dieses Kapitels

Theorem 3.2.43 *Sei $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F},\,\mathbf{P})$-Martingal über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ und Startverteilung $\mu := \mathbf{P}_{M_0}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Dann existiert ein Markov-Kern $K_\mathbf{M}$ von $(\mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+),\mathfrak{B}(\mathbb{R})\otimes\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ nach $(E_+,\mathfrak{B}(E_+))$ mit folgenden Eigenschaften:*

(K1) *$K_\mathbf{M}$ ist nicht-antizipativ, d. h., die Abbildung $K_\mathbf{M}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,D) : \mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+) \to [0,1]$ ist $\overline{\mathfrak{B}(\mathbb{R})\otimes\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mu\otimes\mathbb{W}}$-meßbar für jedes $t \geq 0$ und $D \in \mathcal{D}_t$;*

(K2) *Für eine und damit für jede $(\mathbf{M},\,\mathbf{P})$-Erweiterung $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\,\tilde{\mathbf{P}},\tilde{\mathbb{F}},\mathbf{B}^*)$ gilt*

$$K_\mathbf{M}(\tilde{M}_0,\mathbf{B}^*,D) = \tilde{\mathbf{P}}(\{\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle \in D\}\,|\,\sigma(\tilde{M}_0,\mathbf{B}^*))\,, \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.}\,, \quad D \in \mathfrak{B}(E_+)\,.$$

Beweis: Die Existenz eines im Sinne von **(K1)** nicht-antizipativen Markov-Kernes $K_{\mathbf{M}}$ von $(\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes, \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ nach $(E_+, \mathfrak{B}(E_+))$ folgt aus den beiden Sätzen 3.2.14 und 3.2.21. Satz 3.2.27 liefert die Richtigkeit von **(K2)**. □

Diese Eigenschaften aus dem vorhergehenden Theorem wollen wir zu einem Begriff zusammenfassen.

Definition 3.2.44 *Sei* $\mathbf{M} = (M_t)_{t \geq 0}$ *ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$*-Martingal über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *und* $\mu := \mathbf{P}_{M_0}$*. Dann heißt ein Markov-Kern* $K_{\mathbf{M}}$ *von* $(\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ *nach* $(E_+, \mathfrak{B}(E_+))$ *mit den Eigenschaften **(K1)** und **(K2)** zulässig für* $\mathbf{M}$ *bzw. für die Verteilung von* $\mathbf{M}$.

Man beachte, daß nach Satz 3.2.27 bzw. Theorem 3.2.43 die Elemente der Menge aller zulässigen Markov-Kerne eines stetigen lokalen Martingals $\mathbf{M}$ mit Startverteilung μ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ sich bis auf einer $\mu \otimes \mathbb{W}$-Nullmenge nicht unterscheiden. Man spricht in diesem Fall auch von der $\mu \otimes \mathbb{W}$-*Ununterscheidbarkeit* des zulässigen Markov-Kernes für $\mathbf{M}$. Daher wollen wir im folgenden mit $K_{\mathbf{M}}$ stets einen Repräsentanten aus der Menge der zulässigen Markov-Kerne für $\mathbf{M}$ bezeichnen. Aus **(K2)** zusammen mit (3.2.11) erhalten wir für die Verteilung von $\mathbf{M}$ die Darstellung

$$\mathbf{P}_{\mathbf{M}}(C) = \int_{C(\mathbb{R}_+)} (\int_{\mathbb{R}} (\int_{E_+} \mathrm{I}_{\{\bar{\varphi} \in C\}}(x_0, \mathbf{w}, \mathbf{a}) K_{\mathbf{M}}(x_0, \mathbf{w}, d\mathbf{a}))\, \mu(dx_0)) \mathbb{W}(d\mathbf{w}) \tag{3.2.45}$$

mit $C \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$.

Betrachtet man die Beweise der Sätze 3.2.14, 3.2.21 und 3.2.27 genauer, so sieht man, daß keine konkreten Eigenschaften der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ benötigt werden. Die einzige Eigenschaft, die verwendet wird, ist die, daß der quadratische Variationsprozeß $\langle \mathbf{M} \rangle$ von $\mathbf{M}$ eine $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$-Zeittransformation ist und sich diese Eigenschaft auf die $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung überträgt. Somit ist der zulässige Markov-Kern $K_{\mathbf{M}}$ auch unabhängig von der gewählten Filtration $\mathbb{F}$. Man kann daher zur Auffindung von $K_{\mathbf{M}}$ an Stelle der Filtration $\mathbb{F}$ die kanonische Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{M}}$ verwenden. Darüber hinaus genügt es zur Konstruktion eines solchen Markov-Kernes, eine beliebige Standard-$(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung zu betrachten.

Damit können wir nun folgende Charakterisierung für die Martingalmaße angeben. Sei $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$, dann ist der Koordinatenprozeß $\mathbf{Z} = (Z_t)_{t \geq 0}$ auf $C(\mathbb{R}_+)$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z}}, \mathbf{Q})$-Martingal über $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)), \mathbf{Q})$. Indem man die vorhergehenden Ausführungen auf den Prozeß $\mathbf{Z}$ anwendet, erhalten wir folgende Beschreibung der Elemente aus $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$.

Theorem 3.2.46 *Es seien* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *und* $\mu := \mathbf{Q}_{Z_0}$ *auf* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$*. Dann existiert ein zulässiger Markov-Kern* $K_{\mathbf{Q}}$ *für* $\mathbf{Q}$*, und für* $C \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ *gilt*

$$\mathbf{Q}(C) = \int_{C(\mathbb{R}_+)} (\int_{\mathbb{R}} (\int_{E_+} \mathrm{I}_{\{\bar{\varphi} \in C\}}(x_0, \mathbf{w}, \mathbf{a}) K_{\mathbf{Q}}(x_0, \mathbf{w}, d\mathbf{a}))\, \mu(dx_0)) \mathbb{W}(d\mathbf{w})\,. \tag{3.2.47}$$

Darüber hinaus erhalten wir folgenden Zusammenhang zwischen stetigen lokalen Martingalen über einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum und den Elementen aus $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$.

Satz 3.2.48 *Es seien* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *und* $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ *ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$*-Martingal über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *mit* $\mathbf{P}_{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}$ *auf* $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ *und* $\mu := \mathbf{Q}_{Z_0}$ *auf* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. *Dann gilt*

$$K_{\mathbf{Q}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,D) = K_{\mathbf{M}}(\,\cdot\,,\cdot\,,D)\,, \quad D \in \mathfrak{B}(E_+)\,, \quad \mu \otimes \mathbb{W}\text{-f. s.}\,,$$

wobei $K_{\mathbf{Q}}$ *bzw.* $K_{\mathbf{M}}$ *einen zulässigen Markov-Kern für* $\mathbf{Q}$ *bzw.* $\mathbf{M}$ *bezeichnet.*

Beweis: Der Beweis dieses Satzes ergibt sich ganz analog wie im Beweis von Satz 3.2.27. Sei zunächst $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^\star)$ eine $(\mathbf{Z}, \mathbf{Q})$-Erweiterung für das stetige lokale $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z}}, \mathbf{Q})$-Martingal $\mathbf{Z}$. Für den zulässigen Markov-Kern $K_{\mathbf{Q}}$ für $\mathbf{Q}$ folgt mit **(K2)** zunächst

$$K_{\mathbf{Q}}(\hat{Z}_0, \mathbf{B}^\star, D) = \hat{\mathbf{P}}(\{\langle \hat{\mathbf{Z}} \rangle \in D\} \,|\, \sigma(\hat{Z}_0, \mathbf{B}^\star)) \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-f. s.}\,, \quad D \in \mathfrak{B}(E_+)\,. \tag{3.2.49}$$

Entsprechend erhalten wir für eine beliebige $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$

$$K_{\mathbf{M}}(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, D) = \tilde{\mathbf{P}}(\{\langle \tilde{\mathbf{M}} \rangle \in D\} \,|\, \sigma(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*)) \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.}\,, \quad D \in \mathfrak{B}(E_+)\,, \tag{3.2.50}$$

wobei $K_{\mathbf{M}}$ ein zulässiger Markov-Kern für $\mathbf{M}$ ist.

Wegen der Voraussetzung gilt nun $\hat{\mathbf{P}}_{\hat{\mathbf{Z}}} = \mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{\mathbf{M}}}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 3.2.27 erhalten wir hieraus die Gleichheit

$$\tilde{\mathbf{P}}_{(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, \langle \tilde{\mathbf{M}} \rangle)} = \hat{\mathbf{P}}_{(\hat{Z}_0, \mathbf{B}^\star, \langle \hat{\mathbf{Z}} \rangle)} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(E_+)\,.$$

Unter Verwendung von (3.2.49) und (3.2.50) folgt hiermit

$$K_{\mathbf{Q}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,D) = K_{\mathbf{M}}(\,\cdot\,,\cdot\,,D) \quad \mu \otimes \mathbb{W}\text{-f. s.}\,, \quad D \in \mathfrak{B}(E_+)\,. \tag{3.2.51}$$

Da E_+ ein polnischer Raum ist, folgt aus (3.2.51) schließlich die Behauptung. □

Wie wir bereits gesehen haben, gewinnt man jedes stetige lokale Martingal in gewisser Weise durch Zeittransformation einer geeignet zu wählenden Brownschen Bewegung. Andererseits stellt sich die Frage, ob man nicht ausgehend von einer Brownschen Bewegung ein stetiges lokales Martingal konstruieren kann, welches eine vorgegebene Verteilung $\mathbf{Q}$ aus $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ besitzt. Dies ist insbesondere für die Betrachtungen im Kapitel 4 von großem Interesse und soll in dem nun folgenden Satz geklärt werden.

Satz 3.2.52 *Sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. *Weiterhin sei* $\mathbf{B} = (B_t)_{t\geq 0}$ *eine* $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$*-Brownsche Bewegung über einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *mit Filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *in* $\mathcal{F}$. *Dann existieren eine vollständige Erweiterung* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ *mit Filtration* $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ *in* $\tilde{\mathcal{F}}$ *von* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *und* $\mathbb{F}$ *sowie ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}^*}, \tilde{\mathbf{P}})$*-Martingal* $\mathbf{M}^* = (M_t^*)_{t\geq 0}$ *über* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\mathbf{M}^*$ *ist ein stetiges lokales* $(\tilde{\mathbb{F}}_+^{\tilde{\mathbf{P}}} \circ \langle \mathbf{M}^* \rangle, \tilde{\mathbf{P}})$*-Martingal;*

(ii) $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}_+^{\tilde{\mathbf{P}}}, \tilde{\mathbf{B}})$ *ist für das stetige lokale Martingal* $\mathbf{M}^*$ *aus (i) eine* $(\mathbf{M}^*, \tilde{\mathbf{P}})$*-Erweiterung, wobei* $\tilde{\mathbf{B}}$ *im Sinne von Definition 3.1.12* (iii) *zu verstehen ist;*

(iii) $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{M}^*} = \mathbf{Q}$ *auf* $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$, *und für den zulässigen Markov-Kern* $K_{\mathbf{Q}}$ *für* $\mathbf{Q}$ *gilt*

$$K_{\mathbf{Q}}(M_0^*, \tilde{\mathbf{B}}, D) = \tilde{\mathbf{P}}(\{\langle \mathbf{M}^* \rangle \in D\} \,|\, \sigma(M_0^*, \tilde{\mathbf{B}}))\,, \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.}\,, \quad D \in \mathfrak{B}(E_+)\,.$$

Beweis: Gegeben sei ein $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ mit $\mu := \mathbf{Q}_{Z_0}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Nach Theorem 3.2.46 existiert für $\mathbf{Q}$ ein zulässiger Markov-Kern $K_{\mathbf{Q}}$ mit **(3.2.47)**. Weiterhin betrachten wir den gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ sowie die $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung $\mathbf{B} = (B_t)_{t\geq 0}$. Damit definieren wir unter Verwendung des Borelschen Meßraumes $(E_+, \mathfrak{B}(E_+))$ und der Filtration $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathfrak{B}(E_+)$ einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ in $\tilde{\mathcal{F}}$ auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega} &:= \mathbb{R} \times \Omega \times E_+ \,, \quad \tilde{\mathcal{F}}^o := \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(E_+) \,, \\
\tilde{\mathbf{P}}(\Gamma) &:= \int_\Omega \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{E_+} \mathrm{I}_\Gamma(x_0, \omega, \mathbf{a}) \, K_{\mathbf{Q}}(x_0, \mathbf{B}(\omega), \mathrm{d}\mathbf{a}) \Big) \, \mu(\mathrm{d}x_0) \Big) \, \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) \quad (\Gamma \in \tilde{\mathcal{F}}^o) \,, \\
\tilde{\mathcal{F}}_t &:= \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{D}_t \quad (t \geq 0) \,.
\end{aligned}$$

$\tilde{\mathcal{F}}$ bezeichnet dann die Vervollständigung von $\tilde{\mathcal{F}}^o$ bzgl. $\tilde{\mathbf{P}}$. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\tilde{\mathbb{F}}$ ist dann im Sinne von Definition 3.1.12 eine π-Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mathbb{F}$, wobei $\pi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ definiert ist als

$$\pi(\tilde{\omega}) = \pi(x_0, \omega, \mathbf{a}) := \omega \quad (\tilde{\omega} := (x_0, \omega, \mathbf{a}) \in \tilde{\Omega}) \,.$$

Daß dies richtig ist, sieht man wie folgt: Nach Konstruktion ist π surjektiv sowie $\tilde{\mathcal{F}}$-$\mathcal{F}$-meßbar, und es gilt $\pi^{-1}(\mathcal{F}_t) \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_t$ für $t \geq 0$. Darüber hinaus ist trivialerweise $\tilde{\mathbf{P}} \circ \pi^{-1} = \mathbf{P}$ auf $\mathcal{F}$ erfüllt. Bleibt uns also noch, Eigenschaft (iii) von Definition 3.1.12 zu beweisen. Dazu sei ξ eine $\mathbf{P}$-f. s. beschränkte Zufallsgröße über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Es ist zu zeigen, daß für alle $t \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}(\tilde{\xi} \,|\, \tilde{\mathcal{F}}_t) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}(\tilde{\xi} \,|\, \pi^{-1}(\mathcal{F}_t)) \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} \tag{3.2.53}$$

Für ein $t \geq 0$ betrachten wir die Menge $G \times C \times D \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ mit $G \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{F}_t$ und $D \in \mathcal{D}_t$. Aus der Eigenschaft **(K1)** des zulässigen Markov-Kernes $K_{\mathbf{Q}}$ folgt zunächst, daß die auf $\mathbb{R} \times \Omega$ definierte Abbildung

$$(x_0, \omega) \mapsto K_{\mathbf{Q}}(x_0, \mathbf{B}(\omega), D) \in [0, 1]$$

$\overline{\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_t}^{\mu \otimes \mathbf{P}}$-meßbar ist. Da der Bildraum $[0, 1]$ als kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein polnischer Raum ist, existiert nach Lemma 1.25 in [29] eine von der Menge D abhängige $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_t$-meßbare Abbildung $K_D^* : \mathbb{R} \times \Omega \to [0, 1]$, so daß gilt

$$K_D^* = K_{\mathbf{Q}}(\,\cdot\,, \mathbf{B}(\,\cdot\,), D) \quad \mu \otimes \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{3.2.54}$$

Damit können wir unter Verwendung der Definition des bedingten Erwartungswertes die Richtigkeit von **(3.2.53)** zeigen. Aus der Definition von $\tilde{\mathbf{P}}$ und dem Satz von Fubini folgt zunächst

$$\int_{G \times C \times D} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}(\tilde{\xi} \,|\, \tilde{\mathcal{F}}_t)(\tilde{\omega}) \; \tilde{\mathbf{P}}(\mathrm{d}\tilde{\omega}) = \int_G \Big(\int_C \xi(\omega) K_{\mathbf{Q}}(x_0, \mathbf{B}(\omega), D) \; \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) \Big) \mu(\mathrm{d}x_0) \,.$$

Mit (3.2.54) und der $\mathcal{F}_t$-Meßbarkeit von $K_D^*(x_0\,,\,\cdot\,)$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int\limits_{G\times C\times D} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}(\tilde{\xi}\,|\,\tilde{\mathcal{F}}_t)(\tilde{\omega})\ \tilde{\mathbf{P}}(\mathrm{d}\tilde{\omega}) &= \int\limits_G \Big(\int\limits_C \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\xi\, K_D^*(x_0\,,\,\cdot\,)\,|\,\mathcal{F}_t)(\omega)\ \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega)\Big)\,\mu(\mathrm{d}x_0)\\ &= \int\limits_G \Big(\int\limits_C \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\xi\,|\,\mathcal{F}_t)(\omega)\, K_D^*(x_0\,,\,\omega)\ \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega)\Big)\,\mu(\mathrm{d}x_0)\,.\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir mit (3.2.54) und der Definition von $\tilde{\mathbf{P}}$ die gewünschte Gleichheit

$$\text{(3.2.55)}\qquad \int\limits_{G\times C\times D} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}(\tilde{\xi}\,|\,\tilde{\mathcal{F}}_t)(\tilde{\omega})\ \tilde{\mathbf{P}}(\mathrm{d}\tilde{\omega}) = \int\limits_{G\times C\times D} \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\xi\,|\,\mathcal{F}_t)(\pi(\tilde{\omega}))\ \tilde{\mathbf{P}}(\mathrm{d}\tilde{\omega})\,,$$

welche für jedes $G \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{F}_t$ sowie $D \in \mathcal{D}_t$ und somit für alle Elemente des Erzeugendensystems für die σ-Algebra $\tilde{\mathcal{F}}_t$ erfüllt ist. Mit der üblichen Argumentation erhalten wir mit Bemerkung 3.1.13 die Richtigkeit von (3.2.53). Damit ist $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit der Filtration $\tilde{\mathbb{F}}$ eine π-Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mathbb{F}$. Insbesondere ist $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum.

Über diesem neuen Wahrscheinlichkeitsraum definieren wir für $\tilde{\omega} = (x_0, \omega, \mathbf{a}) \in \tilde{\Omega}$ und $t \geq 0$ die folgenden reellen Zufallsgrößen

$$M_0^*(\tilde{\omega}) = M_0^*(x_0, \omega, \mathbf{a}) := x_0\,, \quad A_t(\tilde{\omega}) = A_t(x_0, \omega, \mathbf{a}) := \mathbf{a}(t)$$

und wie üblich

$$\tilde{B}_t(\tilde{\omega}) = B_t(\pi(\tilde{\omega})) = B_t(\omega)\,.$$

Wir betrachten nun das Quintupel $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}_+^{\tilde{\mathbf{P}}}, \tilde{\mathbf{B}})$. Aus der Definition der σ-Algebra $\mathcal{D}_t$ folgt zunächst, daß der Prozeß $\mathbf{A} = (A_t)_{t\geq 0}$ eine endliche $\tilde{\mathbb{F}}$-Zeittransformation mit Trajektorien in E_+ ist. Des weiteren folgt aus Satz 3.1.14 (i) und (ii), daß $\tilde{\mathbf{B}} = (\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal mit $\langle \tilde{B}\rangle_t = t$ für $t \geq 0$ $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. ist. Mit dem Charakterisierungssatz von P. Lévy (vgl. Satz 2.2.11) erhalten wir schließlich, daß $\tilde{\mathbf{B}}$ eine $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Brownsche Bewegung ist. Insbesondere ist $\tilde{\mathbf{B}}$ sowohl eine $(\tilde{\mathbb{F}}^{\tilde{\mathbf{P}}}, \tilde{\mathbf{P}})$- als auch eine $(\tilde{\mathbb{F}}_+^{\tilde{\mathbf{P}}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Brownsche Bewegung.

Mit den oben eingeführten Größen betrachten wir über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ nun den stochastischen Prozeß $\mathbf{M}^* = (M_t^*)_{t\geq 0}$ mit

$$\text{(3.2.56)}\qquad M_t^* := M_0^* + \tilde{B}_{A_t} = \bar{\varphi}(M_0^*, \tilde{\mathbf{B}}, \mathbf{A})(t) \quad (t \geq 0)\,.$$

Eine Anwendung von Satz 2.4.8 (a) liefert, daß mit $\tilde{\mathbf{B}} \circ \mathbf{A}$ auch $\mathbf{M}^*$ ein stetiges lokales $(\tilde{\mathbb{F}} \circ \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal ist und

$$\text{(3.2.57)}\qquad \langle \mathbf{M}^*\rangle = \mathbf{A} \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.}$$

gilt. Insbesondere ist $\mathbf{M}^*$ ein stetiges lokales $(\tilde{\mathbb{F}}_+^{\tilde{\mathbf{P}}} \circ \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal. Da $\mathbf{A}$ eine $\tilde{\mathbb{F}}$-Zeittransformation und $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ vollständig ist, können wir ohne Einschränkung den Prozeß $\langle \mathbf{M}^*\rangle$ so wählen, daß dieser eine $\tilde{\mathbb{F}}^{\tilde{\mathbf{P}}}$-Zeittransformation ist. Hieraus folgt schließlich, daß $\mathbf{M}^*$ sowohl ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}^*}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal als auch ein stetiges lokales $(\tilde{\mathbb{F}}_+^{\tilde{\mathbf{P}}} \circ \langle \mathbf{M}^*\rangle, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal ist, und wir haben die Aussage (i) des Satzes bewiesen.

Damit haben wir zunächst gezeigt, daß das Quintupel $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}_+^{\tilde{\mathbf{P}}}, \tilde{\mathbf{B}})$ die Eigenschaften (b) und (c) aus Definition 3.2.12 für das über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ definierte stetige lokale $(\mathbb{F}_+^{\tilde{\mathbf{P}}} \circ \langle \tilde{\mathbf{M}}^* \rangle, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal $\mathbf{M}^*$ erfüllt. Bleibt uns somit noch Bedingung (a) aus Definition 3.2.12 zu verifizieren. Hier ist für π die identische Abbildung zu wählen, und es genügt zu zeigen, daß mit $\mathbb{G} := \mathbb{F}_+^{\tilde{\mathbf{P}}} \circ \langle \tilde{\mathbf{M}}^* \rangle$ gilt

$$\mathcal{G}_{T_t^*} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_{t+}^{\tilde{\mathbf{P}}} \quad (t \geq 0)\,, \tag{3.2.58}$$

wobei $\mathbf{T}^* = (T_t^*)_{t \geq 0}$ die Rechtsinverse von $\langle \mathbf{M}^* \rangle$ bezeichnet. Nach Konstruktion ist $\mathbf{T}^*$ eine $\mathbb{G}$-Zeittransformation, da sowohl $\mathbf{M}^*$ als auch $\langle \mathbf{M}^* \rangle$ an die rechtsstetige Filtration $\mathbb{G}$ adaptiert sind. Analog dem Beweis von Lemma 4 (i) in [14] folgt wegen $\langle M^* \rangle_{T_t^*} = t \wedge \langle M^* \rangle_\infty$ für $t \geq 0$ somit die Richtigkeit von (3.2.58), da

$$\mathcal{G}_{T_t^*} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_{\langle M^* \rangle_{T_t^*}+}^{\tilde{\mathbf{P}}} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_{t+}^{\tilde{\mathbf{P}}} \quad (t \geq 0)$$

gilt. Damit haben wir insgesamt die Richtigkeit der Aussage (ii) des Satzes bewiesen.

Für die Verteilung von $\mathbf{M}^*$ bzgl. $\tilde{\mathbf{P}}$ gilt mit (3.2.56) und (3.2.57) zunächst auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{M}^*} = \tilde{\mathbf{P}}_{(M_0^*, \tilde{\mathbf{B}}, \langle \mathbf{M}^* \rangle)} \circ \bar{\varphi}^{-1}\,. \tag{3.2.59}$$

Aus der Definition von $\tilde{\mathbf{P}}$ erhalten wir für $G \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), C \in \mathcal{F}$ und $D \in \mathfrak{B}(E_+)$ schließlich

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{(M_0^*, \tilde{\mathbf{B}}, \langle \mathbf{M}^* \rangle)}(G \times C \times D) &= \int_G \Big(\int_{\{\mathbf{B} \in C\}} K_{\mathbf{Q}}(x_0, \mathbf{B}(\omega), D)\ \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) \Big)\, \mu(\mathrm{d}x_0) \\ &= \int_C \Big(\int_G K_{\mathbf{Q}}(x_0, \mathbf{w}, D)\, \mu(\mathrm{d}x_0) \Big)\, \mathbb{W}(\mathrm{d}\mathbf{w})\,. \end{aligned} \tag{3.2.60}$$

Da $K_{\mathbf{Q}}$ ein zulässiger Markov-Kern für $\mathbf{Q}$ ist und $\mathbf{Q}$ somit die Darstellung (3.2.47) besitzt, erhalten wir aus (3.2.59) und (3.2.60) schließlich $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{M}^*} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Die Aussage (iii) dieses Satzes ist wegen (3.2.60) trivialerweise erfüllt. □

Dieser Satz liefert somit eine Möglichkeit, ein stetiges lokales Martingal aus einer gegebenen Brownschen Bewegung zu konstruieren, so daß dieses eine vorgegebene Verteilung aus $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ besitzt. Wie der Beweis des vorhergehenden Satzes ebenfalls zeigt, kann die dort konstruierte Filtration, bzgl. der der Prozeß ein Martingal ist, sogar echt größer ausfallen als die kanonische Filtration dieses Prozesses.

Betrachtet man den Beweis von Satz 3.2.52 genauer, so erhalten wir die gleichen Aussagen dieses Satzes, abgesehen von der Verteilungsaussage des stetigen lokalen Martingals, wenn man nicht von einem $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ sondern von einem Markov-Kern K von $(\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ nach $(E_+, \mathfrak{B}(E_+))$ ausgeht, welcher zusammen mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ nicht-anitizipativ im Sinne von **(K1)** ist. Dabei spielt dann μ die Rolle der Startverteilung des gefundenen stetigen lokalen Martingals. Mit anderen Worten, für eine gegebene Brownsche Bewegung existieren über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein stetiges lokales Martingal $\mathbf{M}$ mit Startverteilung μ sowie eine Brownsche Bewegung $\mathbf{B}$, so daß gilt

$$K(M_0, \mathbf{B}, D) = \mathbf{P}(\{\langle \mathbf{M} \rangle \in D\} \,|\, \sigma(M_0, \mathbf{B}))\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}\,, \quad D \in \mathfrak{B}(E_+)\,.$$

Zusammengefaßt erhalten wir hieraus und aus Satz 3.1.2, Theorem 3.2.46 sowie Satz 3.2.52 folgenden

Satz 3.2.61 *Gegeben sei ein $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozeß $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit stetigen Trajektorien und sei $\mu := \mathbf{P}_{M_0}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

*(a) Die Verteilung $\mathbf{P_M}$ von $\mathbf{M}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ leitet sich gemäß (3.2.45) aus einem Markov-Kern K von $(\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ nach $(E_+, \mathfrak{B}(E_+))$ ab, welcher zusammen mit μ die Meßbarkeitseigenschaft **(K1)** erfüllt.*

(b) Es existiert ein stetiges lokales $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal $\tilde{\mathbf{M}} = (\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ in $\tilde{\mathcal{F}}$ derart, daß $\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{\mathbf{M}}} = \mathbf{P_M}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ gilt.

Ist eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt, so ist $\mathbf{M}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}}, \mathbf{P})$-Martingal.

3.3 Pure stetige lokale Martingale und deren Verteilung

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit puren stetigen lokalen Martingalen als Spezialfall beschäftigen und insbesondere deren Verteilung genauer untersuchen. Ziel ist es zu zeigen, daß die Eigenschaft pur zu sein nicht nur eine Eigenschaft der Trajektorien eines stetigen lokalen Martingals, sondern auch eine Eigenschaft ihrer Verteilung ist. Dies liefert uns dann eine Möglichkeit der Beschreibung der sogenannten puren Martingalmaße $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. Zuvor wollen wir aber eine Definition für pure stetige lokale Martingale angeben und erste Eigenschaften zusammentragen. Für detailliertere Betrachtungen und verwendete Resultate vergleiche man beispielsweise [14], [15] sowie Kapitel XI in [25].

Gegeben sei ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$. Mit $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ bezeichnen wir die zu $\mathbf{M}$ assoziierte $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung, wobei $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ die Rechtsinverse von $\langle \mathbf{M} \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t\geq 0}$ bezeichnet (vgl. Satz 3.1.22). Dann ist der Begriff eines puren stetigen lokalen Martingals wie folgt definiert.

Definition 3.3.1 *Das stetige lokale $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{M}$ heißt pur, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *$\langle M \rangle_\infty$ ist eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\mathbf{M}\circ\mathbf{T}, \mathbf{P}}$-Stoppzeit;*

(ii) *$\langle \mathbf{M} \rangle$ ist eine $\mathbb{F}_+^{\mathbf{M}\circ\mathbf{T}, \mathbf{P}}$-Zeittransformation.*

Entsprechend der Ausführungen zum Schluß von Abschnitt 3.1 wissen wir, daß der Prozeß $M_0 + \mathbf{W} := (M_0 + W_t)_{t\geq 0}$ ununterscheidbar von dem zeittransformierten Prozeß $\mathbf{M} \circ \mathbf{T}$ ist, es gilt also $M_{T_t} = M_0 + W_t$ für $t \geq 0$ $\mathbf{P}$-f. s. (vgl. (3.1.21)). Im Falle eines vollständigen Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ können die beiden Filtrationen in (i) bzw. (ii) von Definition 3.3.1 mit Hilfe der assoziierten Brownschen Bewegung $\mathbf{W}$ wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbb{F}^{\mathbf{M}\circ\mathbf{T}, \mathbf{P}} = \mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W}, \mathbf{P}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{F}_+^{\mathbf{M}\circ\mathbf{T}, \mathbf{P}} = \mathbb{F}_+^{M_0+\mathbf{W}, \mathbf{P}}. \tag{3.3.2}$$

Dabei ist die Gleichheit zweier Filtrationen komponentenweise zu verstehen. In diesem Abschnitt wollen wir daher nun stets voraussetzen, daß $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein *vollständiger* Wahrscheinlichkeitsraum ist.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß die Bedingungen in Definition 3.3.1 äquivalent zu den Bedingungen aus Proposition 7 in [15] sind, wie man sich leicht überzeugt.

Darüber hinaus sei angemerkt, daß im Falle $\langle M\rangle_\infty = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. Definition 3.3.1 konform mit der Definition purer stetiger lokaler Martingale in Revuz und Yor ist (vgl. Definition V.4.10 in [35]). Weiterhin wollen wir festhalten, daß jedes pure stetige lokale $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ die $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft besitzt (vgl. Theorem 2 zusammen mit Proposition 8 in [15]). Die Umkehrung ist aber im allgemeinen nicht richtig, wie wir im Beispiel 5.1.3 noch sehen werden. Vielmehr gilt: Besitzt $\mathbf{M}$ die $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft und ist $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \circ \mathbf{T} = \mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}}$, so ist $\mathbf{M}$ pur (vgl. Proposition 8 zusammen mit Proposition 7 in [15]). Darüber hinaus gilt folgende alternative Charakterisierung der Darstellbarkeitseigenschaft eines stetigen lokalen Martingals.

Satz 3.3.3 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) $\mathbf{M}$ *besitzt die* $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$*-Darstellbarkeitseigenschaft.*

(b) $\mathbf{P}$ *ist ein extremaler Punkt der konvexen Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße* $\mathbf{P}^*$ *auf* $\mathcal{F}_\infty$ *mit* $\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$ *auf* $\mathcal{F}_0$*, so daß* $\mathbf{M}$ *ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}^*}, \mathbf{P}^*)$*-Martingal ist.*

(c) Ist $\mathbf{P}^*$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $\mathcal{F}_\infty$ *mit* $\mathbf{P}^* \ll \mathbf{P}$*, d. h.,* $\mathbf{P}^*$ *ist absolut-stetig bzgl.* $\mathbf{P}$*, so daß* $\mathbf{M}$ *ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}^*}, \mathbf{P}^*)$*-Martingal ist. Dann folgt aus* $\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$ *auf* $\mathcal{F}_0$ *die Gleichheit* $\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$ *auf* $\mathcal{F}_\infty$*.*

Gilt $M_0 = 0$ $\mathbf{P}$*-f. s. und besitzt* $\mathbf{M}$ *die* $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$*-Darstellbarkeitseigenschaft, so ist* $\mathcal{F}_{0+}$ *unabhängig von der* σ*-Algebra* $\mathcal{F}^{\mathbf{M}}_\infty$*.*

Beweis: Zum Beweis dieses Satzes vergleiche man Theorem 11.2 und Theorem 11.3 in [25] bzw. die Beweise von Theorem V.4.6 und Theorem V.4.7 in [35] sowie Korollar 1 zu Proposition 3 in [15]. □

Bevor wir eine Charakterisierung der Verteilung eines puren stetigen lokalen $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingals $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ betrachten, wollen wir als erstes untersuchen, wie sich die Purheit durch eine Brownsche Bewegung über einer $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung beschreiben läßt. Zunächst gilt folgender einfacher Satz, den wir für eine beliebige gestoppte $(\mathbb{G}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung beweisen, wobei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration in $\mathcal{F}$ bezeichnet.

Satz 3.3.4 *Es seien* $\overline{\mathbf{W}} = (\overline{W}_t)_{t\geq 0}$ *eine in* τ *gestoppte* $(\mathbb{G}, \mathbf{P})$*-Brownsche Bewegung und* ξ *eine* $\mathcal{G}_0$*-meßbare reelle Zufallsgröße über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*. Dann sind für das stetige lokale* $(\mathbb{G}, \mathbf{P})$*-Martingal* $\xi + \overline{\mathbf{W}}$ *folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\xi + \overline{\mathbf{W}}$ *besitzt die* $\mathbb{F}^{\xi+\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$*-Darstellbarkeitseigenschaft.*

(b) τ *ist eine vorhersagbare* $\mathbb{F}^{\xi+\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$*-Stoppzeit.*

(c) $\xi + \overline{\mathbf{W}}$ *ist pur.*

Ist speziell $\overline{\mathbf{W}}$ *die assoziierte Brownsche Bewegung eines stetigen lokalen Martingals* $\overline{\mathbf{M}}$ *und* $\xi := \overline{M}_0$*, dann sind diese äquivalenten Bedingungen bereits dann erfüllt, wenn* $\overline{\mathbf{M}}$ *pur ist.*

Beweis: Der letzte Teil dieses Satzes folgt mit (3.3.2) bereits aus Definition 3.3.1 (i).

Wir betrachten das stetige lokale $(\mathbb{G}, \mathbf{P})$-Martingal $\xi + \overline{\mathbf{W}}$. Da $\overline{\mathbf{W}}$ eine in τ gestoppte $(\mathbb{G}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung ist, gilt für den quadratischen Variationsprozeß $\langle \xi + \overline{\mathbf{W}}\rangle = (\langle \xi + \overline{W}\rangle_t)_{t\geq 0}$ von $\xi + \overline{\mathbf{W}}$:

(3.3.5) $$\langle \xi + \overline{W}\rangle_t = \langle \overline{W}\rangle_t = t \wedge \tau\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Also ist $\langle \xi + \overline{W} \rangle_\infty = \tau$ $\mathbf{P}$-f. s. und somit ist τ eine $\mathbb{F}_+^{\xi+\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit, wobei Letzteres aus $\{\tau < t\} = \{\langle \xi + \overline{W} \rangle_\infty < t\} \in \mathcal{F}_t^{\xi+\overline{W},\mathbf{P}}$ folgt. Mit Proposition 1 und Proposition 6 in [14] folgt hieraus, daß die Bedingung (a) die Bedingung (b) impliziert.

Für den Beweis der Implikation $(b) \Rightarrow (c)$ sei τ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\xi+\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit. Aus (3.3.5) folgt unmittelbar, daß auch $\langle \xi + \overline{W} \rangle_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\xi+\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit ist. Für die Rechtsinverse $\mathbf{C} = (C_t)_{t\geq 0}$ von $\langle \xi + \overline{\mathbf{W}} \rangle$ erhalten wir mit (3.3.5) die Darstellung

$$C_t = \begin{cases} t\,, & \text{falls} \quad t < \tau\,, \\ +\infty\,, & \text{falls} \quad t \geq \tau\,, \end{cases} \qquad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Da $\overline{\mathbf{W}}$ eine in τ gestoppte $(\mathbb{G}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung ist, sind die Trajektorien $\overline{\mathbf{W}}(\omega)$ konstant auf dem Intervall $[\tau(\omega), +\infty]$ für $\mathbf{P}$-f. a. $\omega \in \{\tau < +\infty\}$ (vgl. Satz 2.2.4 (b)). Für den zeittransformierten Prozeß $\xi + \overline{\mathbf{W}} \circ \mathbf{C} = (\xi + \overline{W}_{C_t})_{t\geq 0}$ gilt somit die Beziehung

$$\xi + \overline{W}_{C_t} = \xi + \overline{W}_t\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{3.3.6}$$

Also ist zum einen $\langle \xi + \overline{W} \rangle_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\xi+\overline{\mathbf{W}}\circ\mathbf{C},\mathbf{P}}$-Stoppzeit und zum anderen ist $\langle \xi + \overline{\mathbf{W}} \rangle$ eine $\mathbb{F}_+^{\xi+\overline{\mathbf{W}}\circ\mathbf{C},\mathbf{P}}$-Zeittransformation. Dies bedeutet aber, daß $\xi + \overline{\mathbf{W}}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{G}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Somit folgt (c) aus (b).

Wie wir bereits oben ausgeführt haben, besitzt jedes pure stetige lokale Martingal bzgl. der kanonischen Filtration die Darstellbarkeitseigenschaft. Damit ist auch die Implikation $(c) \Rightarrow (a)$ bewiesen und der Beweis des Satzes ist vollständig. □

Eine Aussage hinsichtlich Zeittransformation purer stetiger lokaler Martingale macht der nun folgende Satz. Man vergleiche hierzu auch Theorem 5 in [16] und die daran anschließende Bemerkung. Hier wird im Gegensatz zum nachfolgenden Satz, welcher von einem beliebigen stetigen lokalen Martingal ausgeht, die Stetigkeit der Zeittransformation gefordert. Für unsere Fälle genügt es, daß das stetige lokale Martingal zumindest an die Zeittransformation adaptiert ist.

Satz 3.3.7 *Seien* $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ *ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$*-Martingal und* $\mathbf{C} = (C_t)_{t\geq 0}$ *eine endliche* $\mathbb{F}_+^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$*-Zeittransformation, so daß* $\mathbf{M}$ *an* $\mathbf{C}$ *adaptiert ist. Ist* $\mathbf{M}$ *pur, dann ist der zeittransformierte Prozeß* $\mathbf{M} \circ \mathbf{C} = (M_{C_t})_{t\geq 0}$ *ein pures stetiges lokales* $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}\circ\mathbf{C},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$*-Martingal. Insbesondere gilt* $\mathcal{F}_t^{\mathbf{M}\circ\mathbf{C},\mathbf{P}} = \mathcal{F}_{C_t}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$ *für jedes* $t \geq 0$.

Beweis: Sei $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal. Aus dem Satz von Kazamaki (vgl. Satz 2.4.8 (a)) folgt zunächst, daß der zeittransformierte Prozeß $\mathbf{M} \circ \mathbf{C} = (M_{C_t})_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \circ \mathbf{C}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Da $\mathbf{M}$ pur ist, besitzt es somit die $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft. Aus Proposition 1 in [14] folgt dann, daß die Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$ rechtsstetig ist, und somit ist $\mathbf{M} \circ \mathbf{C}$ sogar ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \circ \mathbf{C}, \mathbf{P})$-Martingal. Für den quadratischen Variationsprozeß $\langle \mathbf{M} \circ \mathbf{C} \rangle$ von $\mathbf{M} \circ \mathbf{C}$ gilt mit Satz 2.4.8 (a)

$$\langle \mathbf{M} \circ \mathbf{C} \rangle = \langle \mathbf{M} \rangle \circ \mathbf{C} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{3.3.8}$$

Es ist nun zu zeigen, daß der Prozeß $\mathbf{M} \circ \mathbf{C}$ pur ist. Bezeichne dazu $\hat{\mathbf{T}} = (\hat{T}_t)_{t\geq 0}$ die Rechtsinverse von $\langle \mathbf{M} \circ \mathbf{C} \rangle$ und $\mathbf{R} = (R_t)_{t\geq 0}$ die Rechtsinverse von $\mathbf{C} = (C_t)_{t\geq 0}$. Dann gilt mit (3.3.8)

$$\hat{T}_t = \inf\{s \geq 0 : \langle M \rangle_{C_s} > t\} = R_{T_t}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Dabei ist $\mathbf{T}$ die Rechtsinverse von $\langle \mathbf{M} \rangle$. Für die zu $\mathbf{M} \circ \mathbf{C}$ assoziierte $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}\circ\mathbf{C},\,\mathbf{P}} \circ \hat{\mathbf{T}},\, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung $\hat{\mathbf{W}} = (\hat{W}_t)_{t\geq 0}$ gilt

$$M_0 + \hat{\mathbf{W}} = (\mathbf{M} \circ \mathbf{C}) \circ \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{M} \circ (\mathbf{C} \circ \hat{\mathbf{T}}) = \mathbf{M}^{C_\infty} \circ \mathbf{T} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}\,,$$

wobei $M_{C_0} = M_0$ wegen der $\mathbf{C}$-Adaptiertheit von $\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}^{C_\infty} \circ \mathbf{T} = (M_{T_t \wedge C_\infty})_{t\geq 0}$ ist.

Nun ist $T_t < C_\infty$ auf der Menge $\{t < \langle M \rangle_{C_\infty}\}$ $\mathbf{P}$-f. s., woraus

$$M_0 + \hat{W}_t = M_{T_t} = M_0 + W_t \quad \text{auf} \quad \{t < \langle M \rangle_{C_\infty}\} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

folgt. Aus der Stetigkeit der Trajektorien von $\hat{\mathbf{W}}$ und von $\mathbf{W}$ erhalten wir hieraus schließlich

$$M_0 + \hat{\mathbf{W}}^{\langle M \rangle_{C_\infty}} = M_0 + \mathbf{W}^{\langle M \rangle_{C_\infty}} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{3.3.9}$$

Um nun zu zeigen, daß der Prozeß $\mathbf{M} \circ \mathbf{C}$ pur ist, genügt es unter Beachtung von (3.3.2) und (3.3.8) folgendes zu verifizieren:

(i) $\langle M \rangle_{C_\infty}$ ist eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{M_0+\hat{\mathbf{W}},\,\mathbf{P}}$-Stoppzeit;

(ii) $(\langle M \rangle_{C_t})_{t\geq 0}$ ist eine $\mathbb{F}_+^{M_0+\hat{\mathbf{W}},\,\mathbf{P}}$-Zeittransformation.

Aus der Purheit von $\mathbf{M}$ folgt mit Satz 3.3.4, daß der Prozeß $M_0 + \mathbf{W}$ die $\mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W},\,\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft besitzt. Um nun (i) und (ii) zu zeigen, genügt es wegen (3.3.9) zu zeigen, daß $\langle M \rangle_{C_t}$ eine $\mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W},\,\mathbf{P}}$-Stoppzeit für jedes $t \geq 0$ ist (vgl. die Propositionen 1, 5, 6 in [14] sowie Theorem T.III.47 in [7]).

Dies sieht man aber wie folgt: Da $\mathbf{M}$ pur ist, folgt mit Proposition 7 in [15] die Identität $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}} \circ \mathbf{T} = \mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W},\,\mathbf{P}}$. Für $t \geq 0$ und $s \geq 0$ folgt dann aber hieraus

$$\{\langle M \rangle_{C_t} > s\} = \{C_t > T_s\} \in \mathcal{F}_s^{M_0+\mathbf{W},\,\mathbf{P}}\,.$$

Denn ist $u \geq 0$, dann gilt

$$\{\langle M \rangle_{C_t} > s\} \cap \{T_s \leq u\} = \{C_t > T_s\} \cap \{T_s \leq u\} \in \mathcal{F}_u^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}}\,,$$

da nach Voraussetzung sowohl C_t als auch T_s jeweils $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Stoppzeiten sind und somit

$$\{C_t > T_s\} \in \mathcal{F}_{C_t}^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}} \cap \mathcal{F}_{T_s}^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}}$$

gilt. Also ist $\langle M \rangle_{C_t}$ eine $\mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W},\,\mathbf{P}}$-Stoppzeit für jedes $t \geq 0$. Mit dem vorher gesagten ist damit der erste Teil des Satzes bewiesen.

Der Nachweis der Gleichheit der beiden σ-Algebren $\mathcal{F}_t^{\mathbf{M}\circ\mathbf{C},\,\mathbf{P}}$ und $\mathcal{F}_{C_t}^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}}$ für $t \geq 0$ erfolgt ganz analog wie im Beweis von Theorem 5 in [16]. Wie dort dargestellt, kann man mit den obigen Bezeichnungen die folgende Inklusionskette für $t \geq 0$ zeigen

$$\mathcal{F}_t^{\mathbf{M}\circ\mathbf{C},\,\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}_{C_t}^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}_{\langle M \rangle_{C_t}}^{M_0+\mathbf{W},\,\mathbf{P}} = \mathcal{F}_{\langle M \rangle_{C_t}}^{M_0+\hat{\mathbf{W}},\,\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}_{\hat{T}_{\langle M \rangle_{C_t}}}^{\hat{\mathbf{M}},\,\mathbf{P}} = \mathcal{F}_t^{\mathbf{M}\circ\mathbf{C},\,\mathbf{P}}\,.$$

□

Als nächstes wollen wir untersuchen, wie sich die Eigenschaft der Purheit eines stetigen lokalen Martingals bei Erweiterung des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes verhält. Dabei wird der vorhergehende Satz von Nutzen sein. Im Hinblick auf die Charakterisierung der Verteilung purer Martingalmaße wollen wir den Satz angepaßt an unsere Situation formulieren.

Satz 3.3.10 *Sei $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Dann ist $\mathbf{M}$ genau dann pur, wenn für eine beliebige und damit für jede vollständige $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ der Prozeß $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle = (\langle\tilde{M}\rangle_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\mathbf{B}^*, \tilde{\mathbf{P}}}$-Zeittransformation ist.*

Beweis: Für den Beweis der Notwendigkeit des Satzes sei $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal. Per Definition ist dann $\langle M\rangle_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W}, \mathbf{P}}$-Stoppzeit und $\langle\mathbf{M}\rangle$ eine $\mathbb{F}_+^{M_0+\mathbf{W}, \mathbf{P}}$-Zeittransformation, und es gilt (vgl. Proposition 7 in [15])

$$\mathbb{F}^{\mathbf{M}, \mathbf{P}} \circ \mathbf{T} = \mathbb{F}^{\mathbf{M}\circ\mathbf{T}, \mathbf{P}} = \mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W}, \mathbf{P}} . \tag{3.3.11}$$

Dabei hat man zu beachten, daß die Filtrationen $\mathbb{F}^{\mathbf{M}, \mathbf{P}}$ und $\mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W}, \mathbf{P}}$ rechtsstetig sind (vgl. Proposition 1 in [14] zusammen mit Satz 3.3.4). Weiterhin sei $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ eine beliebige vollständige $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung. Also $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ und $\tilde{\mathbb{F}}$ ist eine π-Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$, wobei $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ vollständig ist, und es gilt

$$\tilde{\mathbf{M}} \circ \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{M}_0 + \tilde{\mathbf{W}} = \tilde{M}_0 + \mathbf{B}^{*\langle\tilde{M}\rangle_\infty} \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} \tag{3.3.12}$$

bzw.

$$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{M}_0 + \mathbf{B}^* \circ \langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} \tag{3.3.13}$$

mit einer $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Brownschen Bewegung $\mathbf{B}^* = (B_t^*)_{t\geq 0}$ über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$. Es ist mit (3.3.11) nicht schwierig zu zeigen, daß für $t \geq 0$ gilt

$$\pi^{-1}(\mathcal{F}_{T_t}^{\mathbf{M}, \mathbf{P}}) = \pi^{-1}(\mathcal{F}_t^{M_0+\mathbf{W}, \mathbf{P}}) \subseteq \mathcal{F}_t^{\tilde{M}_0+\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{P}}} .$$

Hieraus und aus der Eigenschaft von $\mathbf{M}$ erhalten wir analog dem Beweis von Satz 3.1.18, daß $\langle\tilde{M}\rangle_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{P}}}$-Stoppzeit ist und daß $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle$ eine $\mathbb{F}_+^{\tilde{M}_0+\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{P}}}$-Zeittransformation ist. Also ist $\tilde{\mathbf{M}} = (\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{P}}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal. Aus Satz 3.3.4 folgt dann, daß der Prozeß $\tilde{M}_0+\tilde{\mathbf{W}}$ die $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{P}}}$-Darstellbarkeitseigenschaft besitzt, woraus mit Proposition 1 in [14] die Rechtsstetigkeit der Filtration $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{P}}}$ folgt. Nach Proposition 6 in [14] ist dann jede $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{P}}}$-Stoppzeit sogar eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{P}}}$-Stoppzeit. Da nun $\tilde{\mathbf{W}}$ eine in $\langle\tilde{M}\rangle_\infty$ gestoppte Brownsche Bewegung ist, folgt aus (3.3.12) zusammen mit Proposition 5 in [14], daß $\langle\tilde{M}\rangle_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\mathbf{B}^*, \tilde{\mathbf{P}}}$-Stoppzeit ist. Darüber hinaus erhalten wir wegen $\langle\tilde{M}\rangle_t \leq \langle\tilde{M}\rangle_\infty$ für $t \geq 0$ $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. aus (3.3.12) und Proposition 5 in [14], daß der Prozeß $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle$ eine Familie von vorhersagbaren $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\mathbf{B}^*, \tilde{\mathbf{P}}}$-Stoppzeiten ist. Damit ist $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle$ eine $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\mathbf{B}^*, \tilde{\mathbf{P}}}$-Zeittransformation und wir haben somit die Notwendigkeit der Aussage bewiesen.

Sei umgekehrt $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle$ eine $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\mathbf{B}^*, \tilde{\mathbf{P}}}$-Zeittransformation für eine beliebige vollständige $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ mit (3.3.12), wobei die Erweiterungsprozedur wiederum mit einer surjektiven Abbildung π bezeichnet sei. Das stetige lokale $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal $\tilde{M}_0 + \mathbf{B}^*$ ist trivialerweise pur (vgl. Satz 3.3.4). Aus Satz 3.3.7 und der Identität (3.3.13) folgt dann aber, daß $\tilde{\mathbf{M}}$ ein pures stetiges lokales Martingal ist. Mit Proposition 1 und 6 in [14] erhalten wir dann aus Definition 3.3.1 (ii) sowie Satz 3.3.4, daß $\langle\tilde{M}\rangle_t$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{P}}}$-Stoppzeit für jedes $t \in [0, +\infty]$ ist. Insbesondere ist auch $\widetilde{\langle M\rangle}_t$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{P}}}$-Stoppzeit für $t \in [0, +\infty]$. Nach

Konstruktion gilt nun $\mathcal{F}_t^{\tilde{M}_0+\tilde{\mathbf{W}}} = \pi^{-1}(\mathcal{F}_t^{M_0+\mathbf{W}})$ für $t \geq 0$. Aus Satz 3.1.18 erhalten wir aber, daß für jedes $t \geq 0$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}_+^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}}$-Stoppzeit A_t über Ω existiert mit $\tilde{A}_t = \widetilde{\langle M \rangle}_t$ $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. für $0 \leq t \leq +\infty$. Da sowohl A_t als auch $\langle M \rangle_t$ Zufallsgrößen über Ω sind, folgt hieraus und aus Definition 3.1.12 (ii), daß $A_t = \langle M \rangle_t$ $\mathbf{P}$-f. s. für jedes $t \in [0, +\infty]$ gilt. Somit ist $\langle M \rangle_t$ für jedes $0 \leq t \leq +\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}_+^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}}$-Stoppzeit. Dies bedeutet aber, daß $\langle \mathbf{M} \rangle$ eine $\mathbb{F}_+^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}}$-Zeittransformation und $\langle M \rangle_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}}$-Stoppzeit ist, wobei man bei letzterem noch beachten muß, daß $\{\langle M \rangle_\infty = 0\} \in \mathcal{F}_0^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}}$ wegen $\{\widetilde{\langle M \rangle}_\infty = 0\} \in \mathcal{F}_0^{\tilde{M}_0+\tilde{\mathbf{W}},\tilde{\mathbf{P}}}$ und der Vollständigkeit von $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ gilt (vgl. IV.69 - IV.78 in [8]). Damit ist aber $\mathbf{M}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal. □

Im folgenden wollen wir die im Abschnitt 3.2 hergeleiteten Markov-Kerne speziell für pure Martingalmaße (vgl. nachfolgende Definition 3.3.17) bzw. für die Verteilung purer stetiger lokaler Martingale eingehender betrachten. Ziel ist es zu zeigen, daß die Eigenschaft pur zu sein sich mit Hilfe der dort konstruierten Markov-Kerne charakterisieren läßt. Dabei sei noch einmal an die Definition eines zulässigen Markov-Kernes und insbesondere an **(K1)** und **(K2)** erinnert.

Satz 3.3.14 *Es sei* $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ *ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$*-Martingal über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *und sei* $K_\mathbf{M}$ *ein zulässiger Markov-Kern für* $\mathbf{M}$*. Weiterhin sei* $\mu := \mathbf{P}_{M_0}$ *auf* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$*. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(a) $\mathbf{M}$ *ist pur.*

(b) Es existiert eine $\mu \otimes \mathbb{W}$*-f. s. eindeutig bestimmte* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$*-*$\mathfrak{B}(E_+)$*-meßbare Abbildung*

$$\mathbf{\Psi} : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+) \to E_+ \,,$$

so daß für $\mu \otimes \mathbb{W}$*-f. a.* $(x_0, \mathbf{w}) \in \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+)$ *gilt*

$$K_\mathbf{M}(x_0, \mathbf{w}, D) = \mathrm{I}_D(\mathbf{\Psi}(x_0, \mathbf{w})) \quad (D \in \mathfrak{B}(E_+)) \,. \tag{3.3.15}$$

Insbesondere ist $\mathbf{\Psi}$ *eine* $(\overline{\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mu\otimes\mathbb{W}})_{t\geq 0}$*-Zeittransformation.*

Beweis: Wir zeigen zunächst die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$. Gemäß der Voraussetzung ist $\mathbf{M}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal. Sei $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ eine vollständige $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung. Entsprechend Satz 3.3.10 ist dann $\langle \tilde{\mathbf{M}} \rangle$ eine $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\mathbf{B}^*,\tilde{\mathbf{P}}}$-Zeittransformation. Somit ist $\langle \tilde{\mathbf{M}} \rangle$ eine $\sigma(\tilde{M}_0 + \mathbf{B}^*)^{\tilde{\mathbf{P}}}$-$\mathfrak{B}(E_+)$-meßbare Abbildung auf $\tilde{\Omega}$ mit Werten in E_+. Unter Verwendung von Lemma 1.13 in Verbindung mit Lemma 1.25 in [29] und wegen

$$\tilde{M}_0 + \mathbf{B}^* = \bar{\varphi}(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*, \alpha_{id}) \,,$$

wobei $\alpha_{id} \in E_+$ mit $\alpha_{id}(t) := t$ für $t \geq 0$ gilt, existiert eine $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(E_+)$-meßbare Abbildung $\mathbf{\Psi} : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+) \to E_+$, so daß auf $\tilde{\Omega}$ gilt

$$\langle \tilde{\mathbf{M}} \rangle = \mathbf{\Psi}(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*) \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} \tag{3.3.16}$$

Insbesondere ist das Funktional $\mathbf{\Psi}$ hierdurch $\mu \otimes \mathbb{W}$-f. s. eindeutig bestimmt.

Mit Eigenschaft **(K2)** des zulässigen Markov-Kernes $K_\mathbf{M}$ erhalten wir aus (3.3.16) unter Beachtung der Unabhängigkeit von $\tilde{M}_0$ und $\mathbf{B}^*$ bzgl. $\tilde{\mathbf{P}}$ und wegen $\mu = \tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{M}_0}$ auf

$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ die Identität

$$\int_\Gamma K_{\mathbf{M}}(x_0,\mathbf{w},D)\,\mu\otimes\mathbb{W}(\mathrm{d}(x_0,\mathbf{w})) = \int_{\{(\tilde M_0,\mathbf{B}^*)\in\Gamma\}} \mathrm{I}_D(\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle)(\tilde\omega)\ \tilde{\mathbf{P}}(\mathrm{d}\tilde\omega)$$
$$= \int_\Gamma \mathrm{I}_D(\mathbf{\Psi}(x_0,\mathbf{w}))\,\mu\otimes\mathbb{W}(\mathrm{d}(x_0,\mathbf{w}))$$

für beliebige $D\in\mathfrak{B}(E_+)$ und $\Gamma\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})\otimes\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$.

Nach Konstruktion ist die Abbildung $(x_0,\mathbf{w})\mapsto \mathrm{I}_D(\mathbf{\Psi}(x_0,\mathbf{w}))$ auf $\mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+)$ eine $\mathfrak{B}(\mathbb{R})\otimes\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-meßbare Abbildung. Entsprechendes gilt auch für den Markov-Kern $K(\,\cdot\,,\,\cdot\,,D)$. Mit dem Satz über die Eindeutigkeit der Radon-Nikodýmschen Dichte und da $\mathfrak{B}(E_+)$ einen abzählbaren Erzeuger besitzt, gilt somit für $\mu\otimes\mathbb{W}$-f. a. $(x_0,\mathbf{w})$ aus $\mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+)$

$$K_{\mathbf{M}}(x_0,\mathbf{w},D) = \mathrm{I}_D(\mathbf{\Psi}(x_0,\mathbf{w})) \quad \text{für} \quad D\in\mathfrak{B}(E_+)\,.$$

Bleibt uns noch zu zeigen, daß $\mathbf{\Psi}$ aufgefaßt als stochastischer Prozeß $\mathbf{\Psi}=(\Psi_t)_{t\geq 0}$ über $\mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+)$ eine $(\overline{\mathfrak{B}(\mathbb{R})\otimes\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mu\otimes\mathbb{W}})_{t\geq0}$-Zeittransformation ist. Dazu seien $s,t\geq 0$ fest, aber beliebig gewählt und

$$D_{s,t} := \{\mathbf{a}\in E_+ : \mathbf{a}(t)\leq s\}\in\mathcal{D}_s\,.$$

Dann gilt zunächst für $\mu\otimes\mathbb{W}$-fast alle $(x_0,\mathbf{w})\in\mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+)$ die Beziehung

$$\mathrm{I}_{\{\Psi_t\leq s\}}(x_0,\mathbf{w}) = \mathrm{I}_{D_{s,t}}(\mathbf{\Psi}(x_0,\mathbf{w})) = K_{\mathbf{M}}(x_0,\mathbf{w},D_{s,t})\,.$$

Aus der Eigenschaft **(K1)** des zulässigen Markov-Kernes $K_{\mathbf{M}}$ für $\mathbf{M}$ folgt dann

$$\{\Psi_t\leq s\}\in\overline{\mathfrak{B}(\mathbb{R})\otimes\mathfrak{B}_s(C(\mathbb{R}_+))}^{\mu\otimes\mathbb{W}}\,.$$

Da $s,t\geq 0$ beliebig gewählt waren, besitzt $\mathbf{\Psi}=(\Psi_t)_{t\geq0}$ somit die gewünschte Eigenschaft.

Es ist nun die umgekehrte Implikation $(b)\Rightarrow(a)$ zu beweisen. Sei hierfür eine $\mathfrak{B}(\mathbb{R})\otimes\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(E_+)$-meßbare Abbildung $\mathbf{\Psi}:\mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+)\to E_+$ gegeben, so daß $\mathbf{\Psi}=(\Psi_t)_{t\geq0}$ eine $(\overline{\mathfrak{B}(\mathbb{R})\otimes\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mu\otimes\mathbb{W}})_{t\geq0}$-Zeittransformation ist und für den zulässigen Markov-Kern $K_{\mathbf{M}}$ die Beziehung (3.3.15) für $\mu\otimes\mathbb{W}$-f. a. $(x_0,\mathbf{w})\in\mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+)$ gilt. Es ist nun zu zeigen, daß das stetige lokale Martingal $\mathbf{M}=(M_t)_{t\geq0}$ pur ist.

Dazu sei $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbf{P}},\tilde{\mathbb{F}},\mathbf{B}^*)$ eine beliebige vollständige $(\mathbf{M},\mathbf{P})$-Erweiterung. Zum Beispiel kann hierfür eine vollständige Standard-$(\mathbf{M},\mathbf{P})$-Erweiterung gewählt werden. Gemäß Satz 3.3.10 genügt es zu zeigen, daß $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle=(\langle\tilde M\rangle_t)_{t\geq0}$ eine $\mathbb{F}^{\tilde M_0+\mathbf{B}^*,\tilde{\mathbf{P}}}$-Zeittransformation ist. Dazu setzen wir

$$A=\{(x_0,\mathbf{w},\mathbf{a})\in\mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+)\times E_+ : \mathbf{a}=\Psi(x_0,\mathbf{w})\}\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})\otimes\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))\otimes\mathfrak{B}(E_+)\,.$$

Aus **(K2)** zusammen mit (3.3.15) erhalten wir die Beziehung

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}(\{\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle=\mathbf{\Psi}(\tilde M_0,\mathbf{B}^*)\}) &= \tilde{\mathbf{P}}_{(\tilde M_0,\mathbf{B}^*,\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle)}(A)\\ &= \int_{\mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+)}\Big(\int_{E_+}\mathrm{I}_A(x_0,\mathbf{w},\mathbf{a})\,K_{\mathbf{M}}(x_0,\mathbf{w},\mathrm{d}\mathbf{a})\Big)\ \tilde{\mathbf{P}}_{(\tilde M_0,\mathbf{B}^*)}(\mathrm{d}(x_0,\mathbf{w}))\\ &= \int_{\mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+)}\mathrm{I}_A(x_0,\mathbf{w},\mathbf{\Psi}(x_0,\mathbf{w}))\ \tilde{\mathbf{P}}_{(\tilde M_0,\mathbf{B}^*)}(\mathrm{d}(x_0,\mathbf{w}))\\ &= \tilde{\mathbf{P}}_{(\tilde M_0,\mathbf{B}^*)}(\mathbb{R}\times C(\mathbb{R}_+))=1\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt aber $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle = \mathbf{\Psi}(\tilde{M}_0, \mathbf{B}^*)$ $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. Entsprechend der Eigenschaft von $\mathbf{\Psi}$ erhalten wir schließlich hieraus, daß $\langle\tilde{\mathbf{M}}\rangle$ eine $\mathbb{F}^{\tilde{M}_0+\mathbf{B}^*,\tilde{\mathbf{P}}}$-Zeittransformation ist, was aber gerade zu zeigen war. □

Damit haben wir gesehen, wie sich pure stetige lokale Martingale über deren Verteilung charakterisieren lassen. Mit Satz 3.2.48 können wir sodann ein analoges Resultat zu Satz 3.1.2 für die sogenannten puren Martingalmaße formulieren. Zuvor wollen wir aber noch diese Klasse von Martingalmaßen definieren.

Definition 3.3.17 *Ein Martingalmaß $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ heißt pur, falls der zugehörige Koordinatenprozeß $\mathbf{Z} = (Z_t)_{t\geq 0}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z}}, \mathbf{Q})$-Martingal über der Vervollständigung $(C(\mathbb{R}_+), \overline{\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$ ist. Mit $\mathcal{M}^p_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ bezeichnen wir die Menge aller puren Martingalmaße $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. Mit $\mathcal{M}^{0,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ bezeichnen wir dann die Menge aller Martingalmaße $\mathbf{Q}$ aus $\mathcal{M}(C(\mathbb{R}_+))$, so daß der in den Nullpunkt verschobene Prozeß ${}^0\mathbf{Z} = (Z_t - Z_0)_{t\geq 0}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z}}, \mathbf{Q})$-Martingal ist.*

Mit dieser Definition haben wir nun folgenden Zusammenhang zwischen puren stetigen lokalen Martingalen und den puren Martingalmaßen.

Satz 3.3.18 *Es sei $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger reeller stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. $\mathbf{M}$ (bzw. ${}^0\mathbf{M}$) ist genau dann ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}}, \mathbf{P})$-Martingal, wenn $\mathbf{P}_{\mathbf{M}}$ zu $\mathcal{M}^p_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ (bzw. zu $\mathcal{M}^{0,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$) gehört.*

Beweis: Der Beweis dieses Satzes folgt wie bereits erwähnt aus den Sätzen 3.1.2, 3.2.48 sowie 3.3.14. □

Ein entsprechendes Resultat gilt auch für den Fall, wenn wir die Verteilung von Martingalen charakterisieren wollen, welche die Darstellbarkeitseigenschaft besitzen. Dieses beruht im wesentlichen darin, daß die Darstellbarkeitseigenschaft eines stetigen lokalen Martingals sich über dessen Verteilung fortpflanzt, wie der nächste Satz zeigt. Folgende Begriffsbestimmung sei hierfür an dieser Stelle angebracht. Ein $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ besitzt die Darstellbarkeitseigenschaft, wenn der Koordinatenprozeß $\mathbf{Z} = (Z_t)_{t\geq 0}$ über $(C(\mathbb{R}_+), \overline{\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$ die $\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$-Darstellbarkeitseigenschaft besitzt. Damit können wir folgenden Satz zeigen.

Satz 3.3.19 *Sei $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger reeller stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Dann besitzt der Prozeß $\mathbf{M}$ die $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft genau dann, wenn $\mathbf{P}_{\mathbf{M}}$ zu $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ gehört und die Darstellbarkeitseigenschaft besitzt.*

Beweis: Zum Beweis der Notwendigkeit sei $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$-Martingal über $(C(\mathbb{R}_+), \overline{\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$, wobei $\mathbf{Q} := \mathbf{P}_{\mathbf{M}}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Insbesondere ist $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$, da $\mathbf{M}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist (vgl. Satz 3.1.2). Für $t \geq 0$ setzen wir

$$Y_t := \mathcal{Y}_t(\mathbf{M})\,.$$

Ähnlich dem Beweis von Satz 3.1.2 (vgl. (3.1.5)) sieht man leicht, daß der stochastische Prozeß $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ist.

Aus der $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft von $\mathbf{M}$ folgt somit die Existenz eines $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-vorhersagbaren stochastischen Prozesses $\mathbf{H} = (H_t)_{t\geq 0}$ aus $\mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}})$, so daß gilt

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{3.3.20}$$

Da $\mathbf{H}$ ein $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-vorhersagbarer stochastischer Prozeß ist, erhalten wir mit der nachfolgenden Argumentation die Existenz eines $\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$-vorhersagbaren stochastischen Prozesses $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$, so daß gilt

$$H_t = \mathcal{H}_t(\mathbf{M})\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{3.3.21}$$

Um dies einzusehen, betrachtet man zunächst Elemente aus dem Erzeugendensystem für die σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}})$ der vorhersagbaren Mengen. Diese wird bekanntlich von allen $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-adaptierten stochastischen Prozessen mit stetigen Trajektorien erzeugt. Ganz analog wie im Beweis von Theorem 2.1 (i) in [3] kann für solche Prozesse die Existenz eines $\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$-adaptierten stochastischen Prozesses mit stetigen Trajektorien gezeigt werden, welcher (3.3.21) erfüllt. Mit der üblichen Argumentation über monotone Klassen folgt dann somit der allgemeine Fall, wobei die Vollständigkeit von $(C(\mathbb{R}_+), \overline{\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$ hierbei eine wichtige Rolle spielt. Unter Verwendung von Satz 3.1.6 erhalten wir, daß $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(\mathbf{Z}, \mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}})$ gilt, da $\mathbf{H} \in \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}})$ und der quadratische Variationsprozeß $\langle \mathbf{M} \rangle$ ein wohlbestimmtes meßbares Funktional von $\mathbf{M}$ ist. Insgesamt geht Gleichung (3.3.20) unter Beachtung von $\mathbf{Y} = \mathcal{Y}(\mathbf{M})$ somit über in

$$\mathcal{Y}_t(\mathbf{M}) = \mathcal{Y}_0(\mathbf{M}) + \int_0^t \mathcal{H}_s(\mathbf{M}) \,\mathrm{d}M_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{3.3.22}$$

bzw.

$$\mathcal{Y}_t(\mathbf{M}) = \mathcal{Y}_0(\mathbf{M}) + (\int_0^t \mathcal{H}_s \,\mathrm{d}Z_s)(\mathbf{M})\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{3.3.23}$$

Um die Gleichheit der in (3.3.22) und (3.3.23) auftretenden stochastischen Integrale einzusehen, zeigt man die Gleichheit zunächst für elementare Prozesse anstelle von $\mathcal{H}$, d. h., man ersetzt $\mathcal{H}$ durch den folgenden über $C(\mathbb{R}_+)$ definierten Prozeß

$$h_0 \mathrm{I}_{\{0\}\times B_0}(t, \mathbf{w}) + \sum_{i=1}^{n-1} h_i \mathrm{I}_{]t_i, t_{i+1}]\times B_i}(t, \mathbf{w}) \quad (t \geq 0,\, \mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+))\,.$$

Dabei sind $B_i \in \mathcal{F}_{t_i}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$, $h_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, \ldots, n)$ und $0 = t_0 = t_1 < \ldots < t_n$ sowie $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Der allgemeine Fall folgt wegen $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(\mathbf{Z}, \mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}})$ aus Theorem 6.2.2 in Verbindung mit Proposition 6.2.12 (b) in [40] durch Approximation von $\mathcal{H}$ durch elementare Prozesse. Mit $\mathbf{P_M} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ erhalten wir aus (3.3.23) schließlich

$$\mathcal{Y}_t = \mathcal{Y}_0 + \int_0^t \mathcal{H}_s \,\mathrm{d}Z_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{Q}\text{-f. s.}$$

Somit läßt sich das $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$-Martingal $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_t)_{t\geq 0}$ als stochastisches Integral bzgl. des stetigen lokalen $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$-Martingals $\mathbf{Z}$ darstellen. Also besitzt $\mathbf{Q}$ bzw. $\mathbf{P_M}$ die Darstellbarkeitseigenschaft.

Der Beweis der Umkehrung dieses Satzes erfolgt ganz analog. Hier hat man nun zu beachten, daß nach dem Faktorisierungslemma zu jedem $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-adaptierten stochastischen Prozeß $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ eine Familie $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_t)_{t\geq 0}$ von Zufallsgrößen über $C(\mathbb{R}_+)$ existiert, so daß $\mathcal{Y}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}$ adaptiert ist und

$$Y_t = \mathcal{Y}_t(\mathbf{M}) \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

für jedes $t \geq 0$ gilt. Auch hier ist es nicht schwierig zu zeigen, daß $\mathcal{Y}$ ein $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$-Martingal ist, falls $\mathbf{Y}$ ein $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Aus der Darstellbarkeitseigenschaft von $\mathbf{Q}$ folgt dann analog dem Beweis der Notwendigkeit unter Beachtung von (3.3.22) sowie (3.3.23) und da $\mathbf{M}$ wegen $\mathbf{P_M} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist, daß $\mathbf{Y}$ die Darstellung (3.3.20) mit einem $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-vorhersagbaren stochastischen Prozeß $\mathbf{H} = (H_t)_{t\geq 0}$ aus $\mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}})$ besitzt. Somit besitzt $\mathbf{M}$ die $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft. □

Zum Schluß wollen wir noch eine weitere Notation einführen, die wir im 5. Kapitel benötigen werden. Sei $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und kennzeichnet $\mathbf{Z} = (Z_t)_{t\geq 0}$ wie gehabt den Koordinatenprozeß auf $C(\mathbb{R}_+)$. Mit $\mathcal{M}^{a,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ bezeichnen wir die Menge aller Martingalmaße $\mathbf{Q}$ aus $\mathcal{M}(C(\mathbb{R}_+))$ mit der Eigenschaft, daß die zum Koordinatenprozeß $\mathbf{Z} = (Z_t)_{t\geq 0}$ assoziierte Brownsche Bewegung ein pures stetiges lokales Martingal über $(C(\mathbb{R}_+), \overline{\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$ ist. Für die Elemente aus $\mathcal{M}^{a,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ gelten nun die entsprechenden Aussagen dieses Abschnitts. Mit anderen Worten haben wir folgenden

Satz 3.3.24 *Sei* $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ *ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}^{\mathbf{M}}, \mathbf{P})$*-Martingal über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*. Dann ist die zu* $\mathbf{M}$ *assoziierte Brownsche Bewegung genau dann pur, falls die Verteilung* $\mathbf{P_M}$ *zu* $\mathcal{M}^{a,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *gehört.*

Beweis: Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus Satz 3.3.18 bzw. Satz 3.3.19 zusammen mit Satz 3.3.4. □

Kapitel 4

Existenz von Lösungen

In diesem Kapitel wollen wir uns der Frage der Existenz von Lösungen eindimensionaler stochastischer Differentialgleichungen mit verallgemeinerter Drift widmen, in der der treibende Prozeß ein gegebenes stetiges lokales Martingal ist. Ziel soll es sein, möglichst allgemeine Bedingungen zu formulieren, die die Existenz einer Lösung von Gleichung (1.0.1) garantieren. Im Abschnitt 4.1 wollen wir uns daher zunächst mit dem Lösungsbegriff beschäftigen und diesen diskutieren. Der darauf folgende Abschnitt 4.2 befaßt sich dann mit Gleichungen ohne Drift. Dabei wollen wir insbesondere auf Eigenschaften von Lösungen solcher Gleichungen eingehen. Mit der eigentlichen Existenzfrage werden wir uns dann im Abschnitt 4.3 näher beschäftigen, wobei wir hier kurz auf die wohlbekannte Technik der Raumtransformation für die betrachtete Gleichung (1.0.1) eingehen wollen. Diese ermöglicht es nämlich, Gleichungen mit Drift in Gleichungen ohne Drift und umgekehrt zu transformieren. Abschließend wollen wir im Abschnitt 4.4 untersuchen, wie sich Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen bzgl. stetiger lokaler Martingale unter Zeittransformation verhalten. Dabei werden wir den Begriff der assoziierten Gleichung einführen. Dieser ist dann grundlegend für die Behandlung der Frage der Eindeutigkeit der Lösung, was im nächsten Kapitel behandelt werden soll.

Falls nicht anders angedeutet, wollen wir in diesem Kapitel stets voraussetzen, daß die auftretenden Wahrscheinlichkeitsräume vollständig sind.

4.1 Definition des Lösungsbegriffes

Im Folgenden betrachten wir die eindimensionale stochastische Differentialgleichung mit verallgemeinerter Drift

$$X_t = X_0 + \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a) + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s\,. \tag{4.1.1}$$

Dabei bezeichnen

- $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borel-meßbare Funktion;
- ν eine Mengenfunktion auf $\bigcup_{N\geq 1} \mathfrak{B}([-N,N])$, so daß ν ein endliches signiertes Maß auf $\mathfrak{B}([-N,N])$ für $N \geq 1$ ist;

· $L^{\mathbf{X}}$ die rechte (bzw. linke, symmetrische) lokale Zeit des stetigen Semimartingals $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ und

· $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß wir Gleichung **(4.1.1)** simultan für die rechte, linke bzw. symmetrische lokale Zeit $L^{\mathbf{X}}$ behandeln wollen.

Wie eingangs bereits erwähnt, sollen möglichst einfache Bedingungen formuliert werden, unter denen eine Lösung von **(4.1.1)** existiert. Dazu ist zunächst zu klären, was wir unter einer Lösung von **(4.1.1)** verstehen wollen. Betrachtet man den in der Literatur gängigen Begriff einer Lösung einer stochastischen Differentialgleichung mit einer Brownschen Bewegung als treibenden Prozeß, so geht die Verteilung des treibenden Prozesses als fester Input bei der Definition des Lösungsbegriffes mit ein. Nun weiß man, daß in diesem Fall die Verteilung des treibenden Prozesses vollständig durch das Wiener-Maß $\mathbb{W}$ auf dem Borelschen Meßraum $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ charakterisiert wird. Daher führen wir den Begriff einer Lösung von Gleichung **(4.1.1)** analog ein, indem wir von einer Verteilung für den treibenden Prozeß ausgehen. In unserem Fall wäre dies also ein $\mathbf{Q}$ aus $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$, welches wir uns als gegeben denken. Dieses $\mathbf{Q}$ beinhaltet dann im Sinne von Satz 3.1.2 die volle Information über den treibenden Prozeß.

Da bekanntlich Lösungen von Gleichung **(4.1.1)** im Falle einer Brownschen Bewegung als treibenden Prozeß nicht notwendig global existieren, sondern nur bis zu einer Explosionszeit, wollen wir den Aspekt der Explosion von Lösungen in dieser Arbeit mit berücksichtigen. Zur Definition der Explosionszeit sei $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozeß über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, d. h., $\mathbf{X}$ ist eine Familie von Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$. Dann ist die Explosionszeit $S^{\mathbf{X}}_\infty$ von $\mathbf{X}$ definiert als

$$S^{\mathbf{X}}_\infty(\omega) = \inf\{s \geq 0 : X_s(\omega) \notin \mathbb{R}\} \quad (\omega \in \Omega)\,.$$

Sind die Trajektorien des Prozesses $\mathbf{X}$ bzgl. der Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ stetig, wobei wir in diesem Fall $X_{t\wedge S^{\mathbf{X}}_\infty} = X_t$ für $t \geq 0$ auf Ω fordern, dann ist $S^{\mathbf{X}}_\infty$ sogar eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\mathbf{X}}$-Stoppzeit. Um dies einzusehen, betrachte man die Folge $(S^{\mathbf{X}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von zufälligen Zeiten mit

$$S^{\mathbf{X}}_n(\omega) := \inf\{s \geq 0 : |X_s(\omega)| \geq n\} \quad (\omega \in \Omega,\, n \in \mathbb{N})\,. \tag{4.1.2}$$

Dann ist $(S^{\mathbf{X}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von $\mathbb{F}^{\mathbf{X}}$-Stoppzeiten, die monoton gegen $S^{\mathbf{X}}_\infty$ konvergiert. Wegen $S^{\mathbf{X}}_n < S^{\mathbf{X}}_\infty$ auf $\{S^{\mathbf{X}}_\infty < +\infty\}$ gilt die Beziehung

$$[\![0, S^{\mathbf{X}}_\infty|\!| := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![0, S^{\mathbf{X}}_n]\!] = [\![0, S^{\mathbf{X}}_\infty[\![$$

(vgl. auch die Bezeichnungen zum Schluß von Abschnitt 2.3). Hieraus folgt aber, daß $S^{\mathbf{X}}_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\mathbf{X}}$-Stoppzeit ist, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ das stochastische Intervall $[\![0, S^{\mathbf{X}}_n]\!]$ eine $\mathbb{F}^{\mathbf{X}}$-vorhersagbare Menge ist, d. h., es gilt $[\![0, S^{\mathbf{X}}_n]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^{\mathbf{X}})$.

Unter einer Lösung von Gleichung **(4.1.1)** wollen wir nun folgendes verstehen.

Definition 4.1.3 ***1.*** *Es sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. *Eine Lösung von Gleichung* (4.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *ist ein Paar* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *von stochastischen Prozessen über einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *mit Filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *in* $\mathcal{F}$, *falls gilt:*

(i) $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ *ist ein stetiger* $\mathbb{F}$*-adaptierter stochastischer Prozeß mit* $X_0 \in \mathbb{R}$ *und* $X_{t\wedge S^{\mathbf{X}}_\infty} = X_t$ *für alle* $t \geq 0$.

(ii) $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ *ist ein stetiges lokales* $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$*-Martingal mit* $\mathbf{P_M} = \mathbf{Q}$ *auf* $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$.

(iii) $\mathbf{X}$ *ist ein stetiges* $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$*-Semimartingal auf* $[\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![$, *und es gilt*

$$X_t = X_0 + \int\limits_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a) + \int\limits_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s \quad \textit{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\textit{-f. s.} \tag{4.1.4}$$

2. *Eine Lösung* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *von* (4.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *heißt starke Lösung, falls der Prozeß* $\mathbf{X}$ *an die Filtration* $\mathbb{F}^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$ *adaptiert ist.*

3. *Ist* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *eine Lösung von* (4.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$, *so heißt* $\mathbf{X}$ *Lösungsprozeß. Das Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbf{P}_{X_0}$ *auf* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *bezeichnen wir als Startverteilung des Lösungsprozesses* $\mathbf{X}$ *bzw. der Lösung* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$.

4. *Eine Lösung* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *von* (4.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *heißt trivial, falls der Lösungsprozeß* $\mathbf{X}$ *trivial ist, d. h., falls* $X_t = X_0$ *für alle* $t \geq 0$ *fast sicher gilt.*

Vorab wollen wir erwähnen, daß wir uns in diesem Kapitel ausschließlich mit der Existenz von *schwachen* Lösungen im Sinne von Punkt 1 der Definition 4.1.3 befassen werden.

Man beachte, daß wir als Lösung von (4.1.1) stets ein Paar $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ von stochastischen Prozessen $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ und $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und nicht nur den Prozeß $\mathbf{X}$ allein betrachten. Neben dem Auffinden eines Lösungsprozesses $\mathbf{X}$ für (4.1.1) ist zusätzlich der treibende Prozeß $\mathbf{M}$ zu konstruieren, so daß dieser eine gegebene Verteilung $\mathbf{Q}$ aus $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ besitzt. Daher wollen wir den treibenden Prozeß stets als Bestandteil einer Lösung ansehen.

Weiterhin sei bemerkt, daß Definition 4.1.3 den Spezialfall der Brownschen Bewegung als treibenden Prozeß enthält. Man hat nur das Martingalmaß $\mathbf{Q}$ durch das Wiener-Maß $\mathbb{W}$ zu ersetzen. Manche Autoren, wie z. B. Jacod und Memin (vgl. [27]), wählen dagegen einen pfadweisen Zugang zur Definition von Lösungen stochastischer Differentialgleichungen. Dabei gibt man sich, angepaßt an unsere Situation, ein stetiges lokales $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ als treibenden Prozeß vor. Dann versteht man i. S. v. [27] unter einer Lösung von Gleichung (4.1.1) eine Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}},\, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\tilde{\mathbb{F}}$ in $\tilde{\mathcal{F}}$ von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mathbb{F}$, so daß zum einen der erweiterte Prozeß $\tilde{\mathbf{M}} = (\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\tilde{\mathbb{F}},\, \tilde{\mathbf{P}})$ Martingal ist und zum anderen ein $\tilde{\mathbb{F}}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}},\, \tilde{\mathbf{P}})$ existiert, welcher zusammen mit $\tilde{\mathbf{M}}$ Gleichung (4.1.1) löst. Diese Definition entspricht bei näherer Betrachtung weitestgehend unserer Definition 4.1.3.

Gemäß den Ausführungen nach Definition 2.3.19 ist die Bedingung (iii) von Definition 4.1.3 äquivalent zu:

(iii') Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der gestoppte Prozeß $\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}}} = (X_{t\wedge S_n^{\mathbf{X}}})_{t\geq 0}$ ein stetiges $(\mathbb{F},\, \mathbf{P})$-Semimartingal, und es gilt

$$X_{t\wedge S_n^{\mathbf{X}}} = X_0 + \int\limits_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}}}}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a) + \int\limits_0^t b(X_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}})\,\mathrm{d}M_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.1.5}$$

Es sei weiterhin bemerkt, daß Definition 4.1.3 die Existenz und Endlichkeit der in (4.1.4) bzw. (4.1.5) auftretenden Integrale beinhaltet, d. h., für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die folgenden Bedingungen erfüllt:

(α) $\int\limits_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}}}}(t,a)\,|\nu|(\mathrm{d}a) = \int\limits_{[-n,n]} L^{\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}}}}(t,a)\,|\nu|(\mathrm{d}a) < +\infty\,,\ t \geq 0$ **P**-f. s., wobei für die lokale Zeit von $\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}}}$ unter Verwendung von (2.3.10) gilt $L^{\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}}}}(t,a) = 0$ für alle $t \geq 0$ und $|a| > n$ **P**-f. s. und $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ auf $\mathfrak{B}([-n,n])$ mit der Hahn-Jordan-Zerlegung $\nu = \nu^+ - \nu^-$ auf $\mathfrak{B}([-n,n])$ gesetzt wird;

(β) $\int\limits_0^t b^2(X_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}})\,\mathrm{d}\langle M\rangle_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}} < +\infty\,,\ t \geq 0\,,$ **P**-f.s.

Damit machen die beiden Integrale in (4.1.4) einen Sinn, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit (4.1.5) eine Zerlegung des stetigen $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingals $\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}}}$ in die **P**-f. s. eindeutig bestimmte Summe $\mathbf{M}^n + \mathbf{V}^n$. Dabei sind $\mathbf{M}^n = (M_t^n)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal mit

$$M_t^n = X_0 + \int\limits_0^t b(X_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}})\,\mathrm{d}M_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

und $\mathbf{V}^n = (V_t^n)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-adaptierter stochastischer Prozeß mit stetigen Trajektorien von lokal beschränkter Variation, für den

$$V_t^n = \int\limits_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}}}}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a)\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

gilt.

Des weiteren wollen wir festhalten, daß die Bedingung $(iii\,')$ unabhängig von der Wahl einer „ankündigenden" Folge für die Explosionszeit des Lösungsprozesses ist. Genauer heißt dies: Sei $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ definiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$. Weiterhin sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von $\mathbb{F}_+$-Stoppzeiten, welche monoton gegen $S_\infty^{\mathbf{X}}$ konvergiert und für die

$$\tau_n < S_\infty^{\mathbf{X}} \quad \text{auf} \quad \{S_\infty^{\mathbf{X}} < +\infty\} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.1.6}$$

gilt. Dann ist auch $\mathbf{X}^{\tau_n}$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal, und es gilt (4.1.5) für τ_n anstelle von $S_n^{\mathbf{X}}$. Man beachte, daß nach Definition einer Lösung für die Explosionszeit $S_\infty^{\mathbf{X}}$ auf Ω gilt $S_\infty^{\mathbf{X}} > 0$. Dies folgt aus der Bedingung $X_0 \in \mathbb{R}$. Somit ist $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen (4.1.6) im gewissen Sinne eine ankündigende Folge für die Explosionszeit $S_\infty^{\mathbf{X}}$.

Zum *Beweis* der obigen Behauptung betrachten wir zunächst allgemein eine $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit $\tau \leq S_\infty^{\mathbf{X}}$ mit $\tau < S_\infty^{\mathbf{X}}$ **P**-f. s. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$ setzen wir

$$\sigma_n(\omega) := \begin{cases} S_n^{\mathbf{X}}(\omega)\,, & \text{falls} \quad S_n^{\mathbf{X}}(\omega) < \tau(\omega)\,, \\ +\infty & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dann ist $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von $\mathbb{F}_+$-Stoppzeiten mit

$$\sigma_n \wedge \tau = S_n^{\mathbf{X}} \wedge \tau \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.1.7}$$

und $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$ **P**-f. s.

Entsprechend **1.**(iii) aus Definition 4.1.3 ist der gestoppte Prozeß $\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal. Somit ist auch der gestoppte Prozeß $\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}}\wedge\tau}$

ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal. Nach Konstruktion von σ_n folgt mit (4.1.7), daß der gestoppte Prozeß $\mathbf{X}^{\sigma_n \wedge \tau}$ ebenfalls ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal ist. Wegen $\sigma_n \uparrow +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. und der Stetigkeit der Trajektorien des Prozesses $\mathbf{X}$ ist dann $\mathbf{X}^\tau$ somit ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal (vgl. Proposition I.4.25 in [28] bzw. Lemma 7.2.2 in [40]).

Als nächstes bleibt noch zu zeigen, daß (4.1.5) für τ anstelle von $S_n^{\mathbf{X}}$ richtig bleibt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir aus (4.1.5) sowie aus (2.3.6) unter Anwendung der Stoppregel (2.3.4) zunächst $\mathbf{P}$-f. s.

$$(4.1.8) \qquad X_{t \wedge S_n^{\mathbf{X}} \wedge \tau} = X_0 + \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}} \wedge \tau}}(t, a)\, \nu(\mathrm{d}a) + \int_0^t b(X_{s \wedge S_n^{\mathbf{X}} \wedge \tau})\, \mathrm{d}M_{s \wedge S_n^{\mathbf{X}} \wedge \tau}\,, \quad t \geq 0\,.$$

Da $\mathbf{X}^\tau$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal ist, erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$ aus der Definition der lokalen Zeit ebenfalls unter Verwendung von (2.3.4), (2.3.6) und (4.1.7) die Beziehung

$$L^{\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}} \wedge \tau}}(t, a) = L^{\mathbf{X}^{\sigma_n \wedge \tau}}(t, a) = L^{\mathbf{X}^\tau}(t \wedge \sigma_n, a) \quad \text{für} \quad t \geq 0\,, a \in \mathbb{R} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Mit der für jedes $n \in \mathbb{N}$ geltenden Eigenschaft (α) erhalten wir hiermit die ν-Integrierbarkeit (i. S. v. (α)) von $L^{\mathbf{X}^\tau}(t\,,\,\cdot)$ für jedes $t \geq 0$ $\mathbf{P}$-f. s.

Unter Verwendung von (β) und (4.1.7) zusammen mit $\sigma_n \uparrow +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. ist es nicht schwierig zu zeigen, daß der Prozeß $(b(X_{t\wedge\tau}))_{t \geq 0}$ zu $\mathcal{L}(\mathbf{M}^\tau, \mathbb{F})$ gehört. Somit ist

$$\left(\int_0^t b(X_{s\wedge\tau})\, \mathrm{d}M_{s\wedge\tau} \right)_{t \geq 0}$$

ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann mit der Stoppregel (2.3.4)

$$\int_0^{t\wedge\sigma_n} b(X_{s\wedge\tau})\, \mathrm{d}M_{s\wedge\tau} = \int_0^t b(X_{s\wedge\tau\wedge S_n^{\mathbf{X}}})\, \mathrm{d}M_{s\wedge\tau\wedge S_n^{\mathbf{X}}}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Faßt man dies alles zusammen, so geht für jedes $n \in \mathbb{N}$ Gleichung (4.1.8) über in

$$X_{t\wedge\sigma_n\wedge\tau} = X_0 + \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}^\tau}(t \wedge \sigma_n, a)\, \nu(\mathrm{d}a) + \int_0^{t\wedge\sigma_n} b(X_{s\wedge\tau})\, \mathrm{d}M_{s\wedge\tau}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Da nun $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von $\mathbb{F}_+$-Stoppzeiten mit $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. ist, folgt hieraus schließlich insgesamt

$$X_{t\wedge\tau} = X_0 + \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}^\tau}(t, a)\, \nu(\mathrm{d}a) + \int_0^t b(X_{s\wedge\tau})\, \mathrm{d}M_{s\wedge\tau}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Damit haben wir gezeigt, daß der Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ zusammen mit $\mathbf{M}$ die Bedingung (iii') für τ anstelle von $S_n^{\mathbf{X}}$ erfüllt. Entsprechend folgt dann hieraus, daß dies auch für die eingangs erwähnte Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{F}_+$-Stoppzeiten gilt. Somit ist die Bedingung

(iii') unabhängig von der Wahl der im obigen Sinne „ankündigenden“ Folge für die Explosionszeit $S_\infty^{\mathbf{X}}$ des Lösungsprozesses $\mathbf{X}$. □

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen nun folgende Schlußweise zu. Es sei $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. Weiterhin seien $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ und $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ zwei stochastische Prozesse über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$, welche die Bedingungen $\mathbf{1.}(i)$ und $\mathbf{1.}(ii)$ aus Definition 4.1.3 erfüllen. Ist $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine im obigen Sinne ankündigende Folge für die Explosionszeit $S_\infty^{\mathbf{X}}$ und gilt (iii') für τ_n an Stelle von $S_n^{\mathbf{X}}$, so ist $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ im Sinne von Definition 4.1.3 eine Lösung von Gleichung **(4.1.1)** bzgl. $\mathbf{Q}$.

Die in dieser Arbeit betrachtete Gleichung **(4.1.1)** ist eine Verallgemeinerung der stochastischen Differentialgleichung mit *gewöhnlicher Drift.* Betrachtet man zunächst den Spezialfall $\nu \equiv 0$ auf $\bigcup_{N\geq 1} \mathfrak{B}([-N,N])$, so geht **(4.1.1)** über in die Gleichung

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s\,. \tag{4.1.9}$$

Damit erhalten wir eine *stochastische Differentialgleichung ohne Drift.* Deren Lösungseigenschaften werden wir im nächsten Abschnitt näher untersuchen.

Als einen weiteren Spezialfall von **(4.1.1)** erhalten wir ebenfalls durch geeignete Wahl von ν die *stochastische Differentialgleichung mit gewöhnlicher Drift.* Hierfür sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Borel-meßbare Funktion, so daß die auf $\mathbb{R}$ definierte Abbildung $x \mapsto a(x)b^{-2}(x)$ über jedes Intervall $[-N,N]$ mit $N \geq 1$ quasi-integrierbar bzgl. des Lebesgue-Maßes ist. Wie in der Maßtheorie üblich, vereinbaren wir folgende Rechenregeln:

$$0 \cdot +\infty := 0 \quad \text{und} \quad b^{-2}(x) := \frac{1}{(b(x))^2} = +\infty, \quad \text{falls} \quad b(x) = 0\,.$$

Auf $\bigcup_{N\geq 1} \mathfrak{B}([-N,N])$ definieren wir die Mengenfunktion ν mit

$$\nu(A) := \int_A a(x)b^{-2}(x)\,\ell(\mathrm{d}x) \quad \text{für} \quad A \in \bigcup_{N\geq 1} \mathfrak{B}([-N,N])\,.$$

Dann ist ν ein signiertes Maß auf $\mathfrak{B}([-N,N])$ für jedes $N \geq 1$.

Für ein $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ sei $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von **(4.1.1)** bzgl. $\mathbf{Q}$, welche über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ definiert ist. Unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$\{x \in \mathbb{R} :\, b(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} :\, a(x) = 0\} \tag{4.1.10}$$

ist $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ im Sinne von Definition 4.1.3 eine Lösung der Gleichung

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s\,. \tag{4.1.11}$$

Beweis: Sei also $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von **(4.1.1)** bzgl. $\mathbf{Q}$. Somit sind $\mathbf{1.}(i)$ bis $\mathbf{1.}(iii)$ von Definition 4.1.3 erfüllt. Nach Definition von ν und wegen der ν-Integrierbarkeit von $L^{\mathbf{X}}(t\,,\,\cdot)$ auf $[\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![$ $\mathbf{P}$-f. s. gilt

$$\int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,y)\,\nu(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,y)\,a(y)b^{-2}(y)\,\ell(\mathrm{d}y) \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}\,, \tag{4.1.12}$$

wobei das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung existiert. Mit

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t b^2(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

und (4.1.12) folgt aus der Formel für die Aufenthaltszeit (2.3.16)

$$\int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,y)\,\nu(\mathrm{d}y) = \int_0^t a(X_s)\,b^{-2}(X_s)\,b^2(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Mit den vorherigen Konventionen erhalten wir hieraus unter Verwendung von (4.1.10)

$$\int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,y)\,\nu(\mathrm{d}y) = \int_0^t a(X_s)\,\mathrm{I}_{\{b\neq 0\}}(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s = \int_0^t a(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Somit gilt insgesamt

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

bzw. für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$X_{t\wedge S_n^{\mathbf{X}}} = X_0 + \int_0^t a(X_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}})\,\mathrm{d}\langle M\rangle_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}} + \int_0^t b(X_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}})\,\mathrm{d}M_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Unter der Voraussetzung (4.1.10) erhalten wir also, daß das über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ definierte Paar $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.1.11) bzgl. $\mathbf{Q}$ im Sinne unserer Definition ist. □

Wie der vorhergehende Beweis zeigt, gilt natürlich auch umgekehrt, daß unter der Voraussetzung (4.1.10) jede Lösung von Gleichung (4.1.11) auch eine Lösung von Gleichung (4.1.1) ist.

Es sei noch bemerkt, daß die Bedingung (4.1.10) im gewissen Sinne abgeschwächt werden kann. Dazu sei $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$, welche über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ definiert ist. Bezeichnet $\mu_{\mathbf{M}}$ das Föllmer-Doléans-Maß von $\mathbf{M}$, d. h., für eine $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$-meßbare Abbildung $Z : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ist

$$\mu_{\mathbf{M}}(Z) := \mathbb{E}\,\Big(\int_0^\infty Z(s,\cdot)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\Big)\,.$$

Dann ist das Paar $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ unter der Voraussetzung

$$\text{(4.1.13)} \qquad a \circ \mathbf{X} = 0 \quad \text{auf} \quad \{b \circ \mathbf{X} = 0\} \cap [\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mu_{\mathbf{M}}\text{-f. ü.}$$

ebenfalls eine Lösung von (4.1.11) bzgl. $\mathbf{Q}$. Dies zeigt man ganz analog wie oben.

Zu guter Letzt sei noch bemerkt, daß im Falle eines trivialen treibenden Prozesses, d. h., für ein $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ gilt $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty = 0\}) = 1$ (vgl. Satz 2.2.4 (a)), jede

Lösung von Gleichung (4.1.1) trivial ist. Um dies einzusehen, sei $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine beliebige Lösung von Gleichung (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$, welche über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ definiert ist. Wegen $\mathbf{P_M} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ ist $\mathbf{M}$ ein triviales stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal, und wir erhalten aus (4.1.1)

$$X_t = X_0 + \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a) \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.1.14}$$

Hieraus folgt, daß $\mathbf{X}$ ein stochastischer Prozeß von lokal beschränkter Variation auf $[\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![$ ist. Für den quadratischen Variationsprozeß von $\mathbf{X}$ gilt dann insbesondere $\langle \mathbf{X} \rangle = 0$ auf $[\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![$ $\mathbf{P}$-f. s., und wir erhalten unter Verwendung der Formel für die Aufenthaltszeit

$$\int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)\,\ell(\mathrm{d}a) = \langle X \rangle_t = 0 \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Dies liefert uns aber

$$L^{\mathbf{X}}(\,\cdot\,, a) = 0 \quad \text{für} \quad \ell\text{-fast alle} \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.1.15}$$

Aufgrund der Rechts- bzw. Linksstetigkeit der rechten bzw. linken lokalen Zeit eines stetigen Semimartingals in der Zustandsvariablen a (vgl. Satz 2.3.9 (b)) erhalten wir für den rechten bzw. linken und wegen (2.3.8) schließlich für den symmetrischen Fall der lokalen Zeit aus (4.1.15)

$$L^{\mathbf{X}}(\,\cdot\,, a) = 0 \quad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Zusammen mit (4.1.14) folgt hieraus, daß $\mathbf{X}$ konstant auf $[\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![$ $\mathbf{P}$-f. s. ist. Also gilt $X_t = X_0$ für alle $t < S_\infty^{\mathbf{X}}$ $\mathbf{P}$-f. s. Wegen der Stetigkeit der Trajektorien des Lösungsprozesses $\mathbf{X}$ erhalten wir aber $X_{S_\infty^{\mathbf{X}}} = X_0$ auf $\{S_\infty^{\mathbf{X}} < +\infty\}$ $\mathbf{P}$-f. s. Somit ist $S_\infty^{\mathbf{X}} = 0$ auf $\{S_\infty^{\mathbf{X}} < +\infty\}$ $\mathbf{P}$-f. s. Da nach Definition X_0 reellwertig ist, gilt $S_\infty^{\mathbf{X}} > 0$ auf Ω. Damit folgt schließlich $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. Also ist der Prozeß $\mathbf{X}$ konstant $\mathbf{P}$-f. s. und $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ somit eine triviale Lösung von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$.

Diesen trivialen Fall wollen wir in den nachfolgenden Ausführungen ausschließen.

Daher vereinbaren wir hier und jetzt für die ganze Arbeit, daß nur solche $\mathbf{Q}$ aus $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ betrachtet werden, für welche $\mathbf{Q}(\{\langle Z \rangle_\infty > 0\}) > 0$ gilt.

4.2 Gleichungen ohne Drift

In diesem Abschnitt wollen wir uns zunächst mit stochastischen Differentialgleichungen ohne Drift beschäftigen. Wir betrachten also die Gleichung

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s\,, \tag{4.2.1}$$

wobei die hier auftretenden Symbole bzw. Koeffizienten die gleichen Bedeutungen besitzen wie zu Beginn von Abschnitt 4.1. Wie wir bereits dargestellt haben, ist (4.2.1) ein Spezialfall von (4.1.1). Ziel dieses Abschnitts ist es, wesentliche Eigenschaften von Lösungen von Gleichung (4.2.1) zusammenzustellen, wobei wir hier unser Hauptaugenmerk auf den Lösungsprozeß richten wollen.

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, spielen stochastische Differentialgleichungen ohne Drift eine wichtige Rolle bei der Behandlung der Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Dies beruht auf der Tatsache, daß sich mittels einer geeigneten Transformation jede Lösung von Gleichung (4.1.1) in eine Lösung von Gleichung (4.2.1) transformieren läßt und umgekehrt (vgl. Abschnitt 4.3). Insbesondere können dann Aussagen über das Verhalten des Lösungsprozesses von Gleichung (4.1.1) aus dem Verhalten des Lösungsprozesses von Gleichung (4.2.1) abgeleitet werden.

In den folgenden Betrachtungen sei ein beliebiges Martingalmaß $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ fest vorgegeben. Weiterhin sei $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von Gleichung (4.2.1) bzgl. $\mathbf{Q}$, welche über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ in $\mathcal{F}$ definiert ist.

Eine erste einfache Eigenschaft der Lösung von Gleichungen ohne Drift betrifft das Explosionsverhalten des Lösungsprozesses und der daraus resultierenden Erkenntnis, daß dieser ununterscheidbar von einem stetigen lokalen Martingal ist. Es gilt nämlich folgender Satz.

Satz 4.2.2 *Für den Lösungsprozeß* $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ *gilt*

$$S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Darüber hinaus ist $\mathbf{X}$ *ununterscheidbar von einem stetigen lokalen* $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$*-Martingal* $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{X}_t)_{t \geq 0}$ *über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, *so daß* $(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{M})$ *eine Lösung von* (4.2.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *ist.*

Beweis: Entsprechend unserer Definition einer Lösung gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ zunächst

$$(4.2.3) \qquad X_{t \wedge S_n^{\mathbf{X}}} = X_0 + \int_0^t b\,(X_{s \wedge S_n^{\mathbf{X}}})\,\mathrm{d}M_{s \wedge S_n^{\mathbf{X}}}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Das in (4.2.3) auftretende stochastische Integral ist nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal. Selbiges gilt somit auch für die gestoppten Prozesse $\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}}}$. Also ist der Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal auf $[\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![$. Gemäß Theorem 5.21 (c) in [25] bzw. Theorem 3.5 in [33] gilt $\mathbf{P}$-f. s. entweder $\overline{\lim}_{t \uparrow S_\infty^{\mathbf{X}}} |X_t| = +\infty$ oder der Grenzwert $\lim_{t \uparrow S_\infty^{\mathbf{X}}} X_t$ existiert in $\overline{\mathbb{R}}$ und ist endlich (vgl. auch Satz 2.2.4 (c) und (d) für den Fall $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s.). Entsprechend unserer Definition einer Lösung besitzt der Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ stetige Trajektorien. Demzufolge existiert in $\overline{\mathbb{R}}$ der Grenzwert $\lim_{t \uparrow S_\infty^{\mathbf{X}}} X_t$ auf $\{S_\infty^{\mathbf{X}} < +\infty\}$. Somit kommt von den beiden Möglichkeiten nur die zweite in Frage, und es existiert der reelle Grenzwert $\lim_{t \uparrow S_\infty^{\mathbf{X}}} X_t$ auf $\{S_\infty^{\mathbf{X}} < +\infty\}$ $\mathbf{P}$-f. s. Dies kann aber wegen $\lim_{t \uparrow S_\infty^{\mathbf{X}}} X_t = X_{S_\infty^{\mathbf{X}}} \in \{\pm\infty\}$ auf $\{S_\infty^{\mathbf{X}} < +\infty\}$ nicht eintreten. Also muß $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. gelten.

Zum Beweis der zweiten Aussage des Satzes sei gemäß den obigen Ausführungen $N \in \mathcal{F}$ eine $\mathbf{P}$-Nullmenge, so daß für alle $\omega \in N^c$ gilt $S_\infty^{\mathbf{X}}(\omega) = +\infty$. Für $\omega \in \Omega$ setzen wir

$$\hat{X}_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \text{falls } \omega \in N^c\,, \\ X_0(\omega), & \text{falls } \omega \in N\,, \end{cases} \qquad (t \geq 0)\,.$$

Dann ist $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{X}_t)_{t \geq 0}$ ein von $\mathbf{X}$ ununterscheidbarer und reellwertiger $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $S_\infty^{\hat{\mathbf{X}}} = +\infty$ auf Ω. Darüber hinaus ist $\hat{\mathbf{X}}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal. Dies folgt wegen $\lim_{n\to+\infty} S_n^{\mathbf{X}} = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. aus der Stetigkeit der Trajektorien von $\hat{\mathbf{X}}$ zusammen mit Satz 2.2.3 (b) und da mit $\mathbf{X}^{S_n^{\mathbf{X}}}$ auch der gestoppte Prozeß $\hat{\mathbf{X}}^{S_n^{\mathbf{X}}}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Aus (4.2.3) folgt dann aus der Definition des stochastischen Integrals bzgl. stetiger lokaler Martingale für $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\hat{X}_{t\wedge S_n^{\mathbf{X}}} = \hat{X}_0 + \int_0^t b\,(\hat{X}_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}})\,\mathrm{d}M_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Mit $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. erhalten wir hieraus unmittelbar

$$\hat{X}_t = \hat{X}_0 + \int_0^t b(\hat{X}_s)\,\mathrm{d}M_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.2.4}$$

Dies bedeutet aber, daß $(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{M})$ wegen $S_\infty^{\hat{\mathbf{X}}} = +\infty$ auf Ω eine Lösung von (4.2.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ im Sinne unserer Definition ist. □

Bemerkung 4.2.5 Daß $\mathbf{X}$ selbst kein stetiges lokales Martingal ist, liegt zum einen daran, daß nach Definition einer Lösung der Prozeß $\mathbf{X}$ Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ annehmen kann und der obige Satz besagt, daß $\mathbf{X}$ nur bis auf eine Nullmenge reellwertig ist. Auf der anderen Seite setzt die Definition eines stetigen lokalen Martingals stets einen reellwertigen Prozeß voraus. Somit ist $\mathbf{X}$ nur ununterscheidbar von einem stetigen lokalen Martingal.

Mit dem Prozeß $\hat{\mathbf{X}}$ aus Satz 4.2.2 und den Bezeichnungen zum Schluß von Abschnitt 2.3 ist es nun auch nicht schwierig zu zeigen, daß für den quadratischen Variationsprozeß $\langle\mathbf{X}\rangle$ und für die lokale Zeit $L^{\mathbf{X}}$ von $\mathbf{X}$ gilt

$$\langle\mathbf{X}\rangle = \langle\hat{\mathbf{X}}\rangle \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \quad \text{und} \quad L^{\mathbf{X}}(t,a) = L^{\hat{\mathbf{X}}}(t,a) \quad \text{für} \quad (t,a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Letzteres gilt im Falle der rechten bzw. linken lokalen Zeit eines stetigen Semimartingals wegen Satz 2.3.9 (b) und im Falle der symmetrischen lokalen Zeit wegen (2.3.8). Damit lassen sich nun insbesondere Aussagen über das Verhalten des Lösungsprozesses $\mathbf{X}$, seines quadratischen Variationsprozesses und der lokalen Zeit aus den für das stetige lokale Martingal $\hat{\mathbf{X}}$ geltenden Eigenschaften ableiten.

Für das Weitere und für die ganze Arbeit wollen wir daher folgende Vereinbarung treffen: Falls wir von einer Lösung der Gleichung ohne Drift sprechen, dann wollen wir stets davon ausgehen, daß der Lösungsprozeß ein stetiges lokales Martingal ist, welches in endlicher Zeit nicht explodiert. Oder mit anderen Worten, wir identifizieren den Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ mit einem nicht-explodierenden stetigen lokalen $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal, welches Gleichung (4.2.1) löst.

Eine weitere interessante und wichtige Eigenschaft des Lösungsprozesses von (4.2.1) bezieht sich auf das Verhalten seiner Trajektorien im Unendlichen (bzw. in $S_\infty^{\mathbf{X}}$), welches mit dem Verhalten der Trajektorien des treibenden Prozesses zusammenhängt.

Satz 4.2.6 *Für den Lösungsprozeß* $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ *existiert in* $\mathbb{R}$ *der Grenzwert* $\lim_{t\to+\infty} X_t$ *auf* $\{\langle M\rangle_\infty < +\infty\}$ $\mathbf{P}$*-f. s.*

Beweis: Gemäß obiger Vereinbarung sei ohne Einschränkung $\mathbf{X}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal mit

(4.2.7) $$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Für den quadratischen Variationsprozeß $\langle \mathbf{X} \rangle = (\langle X \rangle_t)_{t\geq 0}$ von $\mathbf{X}$ gilt dann

(4.2.8) $$\langle X \rangle_t = \int_0^t b^2(X_s)\,\mathrm{d}\langle M \rangle_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Um nun die Behauptung des Satzes zu verifizieren, genügt es nach Satz 2.2.4 (c) zu zeigen, daß $\langle X \rangle_\infty < +\infty$ auf $\{\langle M \rangle_\infty < +\infty\}$ $\mathbf{P}$-f. s. gilt. Bezeichne dazu $\mathbf{C} = (C_t)_{t\geq 0}$ die Rechtsinverse von $\langle \mathbf{X} \rangle$, also auf Ω ist

$$C_t := \inf\{s \geq 0 \,:\, \langle X \rangle_s > t\} \quad (t \geq 0)\,.$$

Entsprechend Satz 3.1.22 gibt es über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ eine in $\langle X \rangle_\infty$ gestoppte $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{C}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ mit der Eigenschaft

(4.2.9) $$\mathbf{X} = X_0 + \mathbf{W} \circ \langle \mathbf{X} \rangle \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Aus (4.2.8) folgt zunächst die Beziehung

(4.2.10) $$\int_0^t \mathrm{I}_{\{b=0\}}(X_s)\,\mathrm{d}\langle X \rangle_s = \int_0^t b^2(X_s)\,\mathrm{I}_{\{b=0\}}(X_s)\,\mathrm{d}\langle M \rangle_s = 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Unter Verwendung von Satz 2.4.6 erhalten wir zusammen mit (4.2.8) – (4.2.10) und (2.4.3) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_0^{t\wedge\langle X \rangle_\infty} b^{-2}(X_0 + W_s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^{C_t} b^{-2}(X_0 + W_{\langle X \rangle_s})\,\mathrm{I}_{\{b\neq 0\}}(X_s)\,\mathrm{d}\langle X \rangle_s \\ &= \int_0^{C_t} b^{-2}(X_s)\,\mathrm{I}_{\{b\neq 0\}}(X_s) b^2(X_s)\,\mathrm{d}\langle M \rangle_s \leq \langle M \rangle_{C_t}\end{aligned}$$

für $t \geq 0$ $\mathbf{P}$-f. s. Da beide Seiten der obigen Ungleichung monoton in t sind, folgt hiermit

(4.2.11) $$\int_0^{\langle X \rangle_\infty} b^{-2}(X_0 + W_s)\,\mathrm{d}s \leq \langle M \rangle_\infty \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Hieraus folgt dann aber $\langle X \rangle_\infty < +\infty$ auf der Menge $\{\langle M \rangle_\infty < +\infty\}$ $\mathbf{P}$-f. s. Denn sei $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ eine $(\mathbf{X}, \mathbf{P})$-Erweiterung. Dann ist $\tilde{\mathbf{M}}$ wegen $\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{\mathbf{M}}} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ ebenfalls ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{M}}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$. Aus (4.2.11) folgt dann

(4.2.12) $$\tilde{\mathbf{P}}(\{\int_0^{\langle \tilde{X} \rangle_\infty} b^{-2}(\tilde{X}_0 + B_s^*)\,\mathrm{d}s \leq \langle \tilde{M} \rangle_\infty\}) = 1\,.$$

Wegen $\ell(\{x \in \mathbb{R} : b^{-2}(x) > 0\}) > 0$ liefert Theorem 3 in [17] sodann

$$\tilde{\mathbf{P}}(\{ \int_0^{+\infty} b^{-2}(\tilde{X}_0 + B_s^*) \, \mathrm{d}s = +\infty\}) = 1 . \tag{4.2.13}$$

Man hat hierbei zu beachten, daß bzgl. $\tilde{\mathbf{P}}$ die $\tilde{\mathcal{F}}_0$-meßbare Zufallsgröße $\tilde{X}_0$ unabhängig von der Brownschen Bewegung $\mathbf{B}^*$ ist. Aus (4.2.12) und (4.2.13) erhalten wir somit

$$\langle \tilde{X} \rangle_\infty < +\infty \quad \text{auf} \quad \{\langle \tilde{M} \rangle_\infty < +\infty\} \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} ,$$

woraus schließlich

$$\mathbf{P}(\{\langle M \rangle_\infty < +\infty, \langle X \rangle_\infty = +\infty\}) = \tilde{\mathbf{P}}(\{\langle \tilde{M} \rangle_\infty < +\infty, \langle \tilde{X} \rangle_\infty = +\infty\}) = 0$$

folgt. Setzt man $N = \{\langle M \rangle_\infty < +\infty, \langle X \rangle_\infty = +\infty\} \in \mathcal{F}$, so ist N eine $\mathbf{P}$-Nullmenge, und für $\omega \in \{\langle M \rangle_\infty < +\infty\} \cap N^c$ gilt dann $\langle X \rangle_\infty(\omega) < +\infty$. Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen. □

Die nächste Aussage bezieht sich auf das Verhalten der Trajektorien des Lösungsprozesses von Gleichung (4.2.1), wenn diese erstmals die Menge erreichen, wo b^{-2} bzgl. des Lebesgue-Maßes nicht lokal-integrierbar ist. Dazu definieren wir folgende abgeschlossene Teilmenge aus $\mathbb{R}$:

$$E_b := \{x \in \mathbb{R} : \int_U b^{-2}(y) \, \ell(\mathrm{d}y) = +\infty \text{ für alle offenen Umgebungen } U \subseteq \mathbb{R} \text{ von } x\}$$

und beweisen

Satz 4.2.14 *Bezeichnet*

$$D_{E_b}^{\mathbf{X}}(\omega) := \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in E_b\} \quad (\omega \in \Omega)$$

die erste Eintrittszeit des Lösungsprozesses $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ *in die Menge* E_b. *Dann gilt:*

(a) $L^{\mathbf{X}}(t, a) = 0$ *für alle* $(t, a) \in \mathbb{R}_+ \times E_b$ $\mathbf{P}$*-f. s.*

(b) $\mathbf{X}^{D_{E_b}^{\mathbf{X}}} = \mathbf{X}$ $\mathbf{P}$*-f. s.*

(c) $\langle \mathbf{X} \rangle^{D_{E_b}^{\mathbf{X}}} = \langle \mathbf{X} \rangle$ $\mathbf{P}$*-f. s.*

Beweis: Der Beweis dieses Satzes verläuft analog dem Beweis von Proposition 4.14 in [20], wobei dort die Brownsche Bewegung als treibender Prozeß durch ein stetiges lokales Martingal zu ersetzen ist.

Zunächst zeigen wir die Richtigkeit von (a). Entsprechend unserer Vereinbarung sei ohne Einschränkung $\mathbf{X}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal. Nach Satz 2.3.9 (c) existiert eine $\mathbf{P}$-Nullmenge $N \in \mathcal{N}_0^{\mathbf{P}}$, so daß für $\omega \in N^c$ die Abbildung $(t, a) \mapsto L^{\mathbf{X}}(\omega, t, a)$ stetig in $(t, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ist. Mit anderen Worten heißt dies, die lokale Zeit eines stetigen lokalen Martingals ist $\mathbf{P}$-fast sicher stetig auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Somit genügt es

$$L^{\mathbf{X}}(t, a) = 0 \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \quad \text{für alle} \quad (t, a) \in \mathbb{R}_+ \times E_b$$

zu zeigen. Dazu betrachten wir ein Paar $(t, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{P}(\{L^{\mathbf{X}}(t, a) > 0\}) > 0 . \tag{4.2.15}$$

Für ein $\omega \in \{L^{\mathbf{X}}(t,a) > 0\} \cap N^c$ existiert nun ein $k := k(\omega) \geq 1$ mit $L^{\mathbf{X}}(\omega,t,a) > \frac{1}{k}$. Wegen der Stetigkeit von $L^{\mathbf{X}}(\omega,t,a)$ in a existiert weiterhin ein $\delta := \delta(\omega,k) > 0$, so daß gilt

$$L^{\mathbf{X}}(\omega,t,z) > \frac{1}{k} \quad \text{für alle} \quad z \in]a-\delta, a+\delta[\,.$$

Für $\delta > 0$ existiert wiederum ein $l := l(\omega,k) \geq 1$, so daß $\delta > \frac{1}{l}$ ausfällt. Setzt man noch $m = k \vee l$, so erhalten wir

$$L^{\mathbf{X}}(\omega,t,z) > \frac{1}{m} \quad \text{für alle} \quad z \in]a-\frac{1}{m}, a+\frac{1}{m}[\,.$$

Nun definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$A_n := \{\omega \in \Omega \,:\, L^{\mathbf{X}}(\omega,t,z) > \frac{1}{n} \text{ für alle } z \in]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}[\,\}\,.$$

Aus der Stetigkeit der lokalen Zeit $L^{\mathbf{X}}$ auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ folgt zum einen $A_n \cap N^c \in \mathcal{F}$ für $n \in \mathbb{N}$ und zum anderen haben wir die Inklusion

$$\{L^{\mathbf{X}}(t,a) > 0\} \cap N^c \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap N^c\,.$$

Wegen (4.2.15) existiert somit ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathbf{P}(A_{n_0} \cap N^c) > 0$. Mittels der Formel für die Aufenthaltszeit (2.3.16) erhalten wir unter Verwendung von (4.2.8) sowie (4.2.10), daß auf $A_{n_0} \cap N^c$ $\mathbf{P}$-f. s. gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n_0} \int\limits_{]a-\frac{1}{n_0}, a+\frac{1}{n_0}[} b^{-2}(y)\,\ell(\mathrm{d}y) &\leq \int\limits_{]a-\frac{1}{n_0}, a+\frac{1}{n_0}[} b^{-2}(y)\, L^{\mathbf{X}}(t,y)\,\ell(\mathrm{d}y) \\
&\leq \int_0^t b^{-2}(X_s)\,\mathrm{d}\,\langle X\rangle_s = \int_0^t b^{-2}(X_s) b^2(X_s) \mathrm{I}_{\{b\neq 0\}}(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \\
&\leq \langle M\rangle_t\,.
\end{aligned}$$

Da der quadratische Variationsprozeß eines stetigen lokalen Martingals stets endlich ist, erhalten wir hieraus die von $\omega \in \Omega$ unabhängige Beziehung

$$\int\limits_{]a-\frac{1}{n_0}, a+\frac{1}{n_0}[} b^{-2}(y)\,\ell(\mathrm{d}y) < +\infty\,.$$

Dies liefert uns schließlich $a \notin E_b$. Damit haben wir

$$L^{\mathbf{X}}(t,a) = 0 \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \quad \text{für} \quad (t,a) \in \mathbb{R}_+ \times E_b$$

gezeigt, womit die Richtigkeit der Aussage (a) bewiesen wurde.

Als nächstes zeigen wir die Aussagen (b) und (c) für $\mathbf{X}$, wobei (c) unmittelbar aus (b) zusammen mit Satz 2.2.4 (b) bzw. (2.2.5) folgt. Für den Fall $D_{E_b}^{\mathbf{X}} = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. ist die Aussage trivial. Sei daher $\mathbf{P}(\{D_{E_b}^{\mathbf{X}} < +\infty\}) > 0$. Zunächst folgt mit Satz 2.1.3 (a), daß sowohl $D_{E_b}^{\mathbf{X}}$ als auch $D_{E_b}^{\mathbf{X}} + t$ mit $t \geq 0$ jeweils $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-Stoppzeiten sind. Wegen der Abgeschlossenheit von E_b sowie der Stetigkeit der Trajektorien von $\mathbf{X}$ gilt $\mathbf{X}_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}} \in E_b$ auf der Menge $\{D_{E_b}^{\mathbf{X}} < +\infty\}$.

Wir definieren nun einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbf{P}^*)$ mit Filtration $\mathbb{F}^* = (\mathcal{F}_t^*)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}^*$ durch:

$$\Omega^* := \Omega \cap \{D_{E_b}^{\mathbf{X}} < +\infty\}\,, \quad \mathcal{F}^* := \mathcal{F} \cap \{D_{E_b}^{\mathbf{X}} < +\infty\}\,, \quad \mathbf{P}^* := \mathbf{P}(\,\cdot\,|\,\{D_{E_b}^{\mathbf{X}} < +\infty\})$$

und $\mathcal{F}_t^* := \mathcal{F}^{\mathbf{P}}_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}+t} \cap \{D_{E_b}^{\mathbf{X}} < +\infty\}$ für $t \geq 0$. Über diesem Wahrscheinlichkeitsraum betrachten wir den stochastischen Prozeß $\mathbf{X}^* = (X_t^*)_{t\geq 0}$ mit

$$X_t^* := X_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}+t} - X_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}} \quad \text{für} \quad t \geq 0\,.$$

Ganz analog dem Beweis von Lemma 9.1.10 in [40] bzw. unter Verwendung des Optional Stopping Theorems kann gezeigt werden, daß $\mathbf{X}^*$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^*, \mathbf{P}^*)$-Martingal über $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbf{P}^*)$ ist. Für den quadratischen Variationsprozeß $\langle \mathbf{X}^* \rangle = (\langle X^* \rangle_t)_{t\geq 0}$ von $\mathbf{X}^*$ erhält man entsprechend

$$\langle X^* \rangle_t = \langle X \rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}+t} - \langle X \rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}^*\text{-f. s.}$$

Gemäß Satz 2.3.9 (c) existiert eine $\mathbf{P}^*$-Nullmenge N^* aus $\mathcal{F}^*$, so daß für $\omega^* \in N^{*c}$ und $t \geq 0$ unter Verwendung der allgemeinen Transformationsformel gilt (vgl. V.3.1 in [10] oder vgl. Lemma 5.15 in [21])

$$\begin{aligned} L^{\mathbf{X}^*}(\omega^*, t, 0) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathrm{I}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(X_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}+s}(\omega^*) - X_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}}(\omega^*))\,\mathrm{d}\langle X \rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}+s}(\omega^*) \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}(\omega^*)}^{D_{E_b}^{\mathbf{X}}(\omega^*)+t} \mathrm{I}_{]X_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}}(\omega^*)-\varepsilon, X_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}}(\omega^*)+\varepsilon[}(X_s(\omega^*))\,\mathrm{d}\langle X \rangle_s(\omega^*) \\ &= L^{\mathbf{X}}(\omega^*, D_{E_b}^{\mathbf{X}}(\omega^*) + t, X_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}}(\omega^*)) - L^{\mathbf{X}}(\omega^*, D_{E_b}^{\mathbf{X}}(\omega^*), X_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}}(\omega^*))\,. \end{aligned}$$

Mit Aussage (a) folgt $L^{\mathbf{X}^*}(t, 0) = 0$ für alle $t \geq 0$ $\mathbf{P}^*$-f. s. Wendet man die Tanaka-Formel (2.3.6) auf den Prozeß $\mathbf{X}^*$ an, so erhalten wir hieraus

$$|X_t^*| = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^*)\,\mathrm{d}X_s^*\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}^*\text{-f. s.}$$

Also ist $(|X_t^*|)_{t\geq 0}$ ein nichtnegatives stetiges lokales $(\mathbb{F}^{*\mathbf{P}^*}, \mathbf{P}^*)$-Martingal mit $|X_0^*| = 0$ $\mathbf{P}^*$-f. s. Das bedeutet aber, daß $(|X_t^*|)_{t\geq 0}$ sogar ein $(\mathbb{F}^{*\mathbf{P}^*}, \mathbf{P}^*)$-Supermartingal ist. Aus der Ungleichung für Supermartingale und der Stetigkeit der Trajektorien von $\mathbf{X}^*$ folgt dann aber $|X_t^*| = 0$ für alle $t \geq 0$ $\mathbf{P}^*$-f. s. und somit auch $X_t^* = 0$ für alle $t \geq 0$ $\mathbf{P}^*$-f. s. Damit erhalten wir schließlich

$$X_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}+t} = X_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}^*\text{-f. s.}\,,$$

bzw.

$$X_{t\wedge D_{E_b}^{\mathbf{X}}} = X_t \quad \text{für alle} \quad t \geq 0 \quad \text{auf} \quad \{D_{E_b}^{\mathbf{X}} < +\infty\} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.2.16}$$

Da (4.2.16) auch auf der Menge $\{D_{E_b}^{\mathbf{X}} = +\infty\}$ $\mathbf{P}$-f. s. gilt, haben wir hiermit die Richtigkeit der Aussagen (b) und (c) für den Prozeß $\mathbf{X}$ bewiesen. □

4.3 Existenz von Lösungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns nun mit der Frage der Existenz von Lösungen der Gleichung

$$X_t = X_0 + \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a) + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s \tag{4.3.1}$$

beschäftigen. Ziel dieses Abschnitts soll es sein, notwendige und hinreichende Bedingungen zu formulieren, unter denen eine Lösung von (4.3.1) für beliebige Startverteilungen existiert und zwar für eine große Klasse stetiger lokaler Martingale als treibende Prozesse für Gleichung (4.3.1).

Für das Weitere wollen wir nun generell voraussetzen, daß ν ein endliches signiertes Maß auf der σ-Algebra $\mathfrak{B}([-N,N])$ für $N \geq 1$ ist. Weiterhin sei die Sprungbedingung

$$\nu(\{x\}) < \frac{1}{2} \quad (\text{bzw.}\ \nu(\{x\}) > -\frac{1}{2}, \quad |\nu(\{x\})| < 1) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.3.2}$$

für die entsprechende Wahl der rechten (bzw. linken, symmetrischen) lokalen Zeit $L^{\mathbf{X}}$ erfüllt. Diese Bedingung an ν ist daher motiviert, daß im Falle $\nu(\{x\}) > \frac{1}{2}$ (bzw. $\nu(\{x\}) < -\frac{1}{2}$, $|\nu(\{x\})| > 1$) für ein $x \in \mathbb{R}$ im allgemeinen keine Lösung von (4.3.1) mit Startverteilung δ_x existieren muß. Als Beispiel sei hier die in [22] bzw. [32] behandelte schiefe Brownsche Bewegung erwähnt. Dieses Beispiel läßt sich ohne Schwierigkeiten auch auf stetige lokale Martingale als treibenden Prozeß verallgemeinern.

Des weiteren sollen die Fälle $\nu(\{x\}) = \frac{1}{2}$ (bzw. $\nu(\{x\}) = -\frac{1}{2}$, $|\nu(\{x\})| = 1$) für ein $x \in \mathbb{R}$ ausgeschlossen werden. Dies entspricht im Falle der Brownschen Bewegung als treibender Prozeß einer Reflektion des Lösungsprozesses im Punkt x und erfordert andere Methoden zur Behandlung der entsprechenden Gleichung (vergleiche dazu beispielsweise [39]). Darüber hinaus versagt in diesem Fall die nachfolgend eingeführte Technik der Raumtransformation (vgl. [32]). Bevor wir zur Raumtransformation kommen, wollen wir noch einen nützlichen Begriff einführen, der sich an die Aussage (b) des Satzes 4.2.14 anlehnt.

Definition 4.3.3 *Es sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. *Eine Lösung* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *von Gleichung* (4.3.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *heißt Fundamentallösung, falls gilt*

$$\int_0^{D^{\mathbf{X}}_{E_b}} \mathrm{I}_{N_b}(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s = 0 \quad \textit{f. s.},$$

wobei $N_b := \{x \in \mathbb{R} : b(x) = 0\}$ *die Nullstellenmenge von* b *bezeichnet.*.

Eine Fundamentallösung besitzt somit einfach gesprochen die Eigenschaft, daß der Lösungsprozeß sich bis zum Eintritt in die Menge E_b nicht in den Nullstellen der Funktion b aufhält.

Die Technik der Raumtransformation erlaubt es nun, Lösungen von Gleichung (4.3.1) in Lösungen einer Gleichung vom Typ (4.2.1) zu transformieren und umgekehrt. Dabei ist diese so beschaffen, daß der treibende Prozeß invariant gegenüber dieser Transformation bleibt. Die Durchführung der Raumtransformation beruht hierbei auf den gleichen Methoden wie im Falle der Brownschen Bewegung als treibenden Prozeß (vgl. [20] und [32]).

Für die rechte (bzw. linke, symmetrische) lokale Zeit in (4.3.1) betrachte man die auf $\mathbb{R}$ definierte eindeutige Lösung g der Integralgleichung

$$g(x) = \begin{cases} 1 - 2 \int\limits_{[0,x]} F(g,y)\,\nu(\mathrm{d}y) & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ 1 + 2 \int\limits_{]x,0[} F(g,y)\,\nu(\mathrm{d}y) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \tag{4.3.4}$$

mit

$$F(g,x) := g(x-) \quad (\text{bzw. } g(x)\,, \quad \frac{1}{2}(g(x) + g(x-))) \quad (x \in \mathbb{R})\,,$$

wobei $g(x-)$ den linksseitigen Grenzwert von g in $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Die Lösung der obigen Integralgleichung läßt sich für die einzelnen Fälle der lokalen Zeit explizit angeben (vgl. Theorem 2.1 und Theorem 3.4 in [42]). Für die rechte lokale Zeit, also für $F(g,x) = g(x-)$ $(x \in \mathbb{R})$, erhält man analog den Ausführungen in [42]

$$g(x) = \begin{cases} \exp(-2\nu([0,x])) \prod\limits_{0 \leq y \leq x} (1 - 2\nu(\{y\})) \exp(2\nu(\{y\})) & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ \exp(2\nu(]x,0[)) \prod\limits_{x<y<0} (1 - 2\nu(\{y\}))^{-1} \exp(-2\nu(\{y\})) & \text{für} \quad x < 0\,. \end{cases} \tag{4.3.5}$$

Für die linke lokale Zeit, also für $F(g,x) = g(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ kann man analog zeigen

$$g(x) = \begin{cases} \exp(-2\nu([0,x])) \prod\limits_{0 \leq y \leq x} (1 + 2\nu(\{y\}))^{-1} \exp(2\nu(\{y\})) & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ \exp(2\nu(]x,0[)) \prod\limits_{x<y<0} (1 + 2\nu(\{y\})) \exp(-2\nu(\{y\})) & \text{für} \quad x < 0\,. \end{cases} \tag{4.3.6}$$

Für den Fall der symmetrischen lokalen Zeit, also für $F(g,x) = \frac{1}{2}(g(x) + g(x-))$ mit $x \in \mathbb{R}$, erhalten wir schließlich

$$g(x) = \begin{cases} \exp(-2\nu([0,x])) \prod\limits_{0 \leq y \leq x} \frac{1-\nu(\{y\})}{1+\nu(\{y\})} \exp(2\nu(\{y\})) & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ \exp(2\nu(]x,0[)) \prod\limits_{x<y<0} \frac{1+\nu(\{y\})}{1-\nu(\{y\})} \exp(-2\nu(\{y\})) & \text{für} \quad x < 0\,. \end{cases} \tag{4.3.7}$$

Als Lösung von (4.3.4) ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine strikt positive und rechtsstetige Funktion von lokal beschränkter Variation, d. h., g ist Differenz zweier monoton wachsender und rechtsstetiger Funktionen. Entsprechendes gilt auch für die Funktion g^{-1}. Diese ist ebenfalls eine Lösung der Integralgleichung (4.3.4), wobei für den Fall der rechten (bzw. linken, symmetrischen) lokalen Zeit anstelle von $F(g,\,\cdot\,)$ die Funktion $\tilde{F}(g^{-1},\,\cdot\,)$ gewählt werden muß mit

$$\tilde{F}(h,x) := -h(x) \quad (\text{bzw. } -h(x-)\,, \quad -\frac{1}{2}(h(x) + h(x-))) \quad (x \in \mathbb{R})\,,$$

für eine reelle Funktion h mit linksseitigem Grenzwert $h(x-)$ in $x \in \mathbb{R}$. An dieser Stelle sei bemerkt, daß ohne die Sprungbedingung (4.3.2) die Konvergenz der höchstens abzählbar unendlichen Produkte in (4.3.5), (4.3.6) bzw. (4.3.7) im allgemeinen nicht gegeben ist.

Damit definieren wir nun eine Funktion $G : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$G(x) = \begin{cases} \int\limits_{[0,x]} g(y)\,\ell(\mathrm{d}y) & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ -\int\limits_{]x,0[} g(y)\,\ell(\mathrm{d}y) & \text{für} \quad x < 0\,. \end{cases} \tag{4.3.8}$$

Aufgrund der Eigenschaften der Funktion g ist G eine streng monoton wachsende und stetige Funktion auf $\overline{\mathbb{R}}$. Nach dem Umkehrsatz für streng monotone Funktionen existiert die Umkehrfunktion H von G, welche auf $]G(-\infty), G(+\infty)[$ definiert ist und dort streng monoton wachsend sowie stetig ist. Weiterhin erweitern wir die Funktionen H und g sowie den Diffusionskoeffizienten b durch die Festlegung

$$H(x) = \begin{cases} -\infty & \text{für} \quad x \in [-\infty, G(-\infty)]\,, \\ +\infty & \text{für} \quad x \in [G(+\infty), +\infty] \end{cases} \tag{4.3.9}$$

und

$$g(-\infty) = g(+\infty) = b(-\infty) = b(+\infty) = 0\,. \tag{4.3.10}$$

Mit der Vereinbarung $a^{-1} = +\infty$ für $a = 0$ erhalten wir dann unter Verwendung der allgemeinen Transformationsformel (vgl. V.3.1 in [10]) für H die Darstellung

$$H(x) = \begin{cases} \int\limits_{[0,x]} h(y)\, \ell(\mathrm{d}y) & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ -\int\limits_{]x,0[} h(y)\, \ell(\mathrm{d}y) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

mit $h(x) := (g(H(x)))^{-1}$ für $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Für das weitere Vorgehen dient nun der folgende Satz, welcher die Verbindung von stochastischen Differentialgleichungen mit verallgemeinerter Drift zu stochastischen Differentialgleichungen ohne Drift herstellt. Zuvor sei aber noch folgendes Lemma zitiert.

Lemma 4.3.11 *Es sei* $\tilde{b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $\tilde{b}(x) := g(H(x)) \cdot b(H(x))$ *für* $x \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$N^c_{\tilde{b}} = G(N^c_b) \quad \textit{und} \quad E^c_{\tilde{b}} = G(E^c_b)\,.$$

Beweis: Für einen Beweis dieses Lemmas, der von analytischer Natur ist, vergleiche man den Beweis von Lemma 4.36 in [20]. □

Für Lösungen einer Gleichung mit dem Diffusionskoeffizienten $\tilde{b}$ aus Lemma 4.3.11 gilt der folgende

Satz 4.3.12 *Es sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. *Über einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *mit Filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *in* $\mathcal{F}$ *sei* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *eine Lösung (bzw. Fundamentallösung, starke Lösung) von*

$$X_t = X_0 + \int\limits_0^t \tilde{b}(X_s)\, \mathrm{d}M_s \tag{4.3.13}$$

bzgl. $\mathbf{Q}$ *mit* $S^{\mathbf{X}}_\infty = +\infty$ *auf* Ω, *wobei* $\tilde{b}$ *die Funktion aus Lemma 4.3.11 bezeichnet. Weiterhin sei auf* Ω

$$\tau := \inf\{s \geq 0 \,:\, X_s \notin]G(-\infty), G(+\infty)[\}\,. \tag{4.3.14}$$

Dann ist $(\mathbf{X}^\tau, \mathbf{M})$ *eine Lösung (bzw. Fundamentallösung, starke Lösung) von* (4.3.13) *bzgl.* $\mathbf{Q}$. *Insbesondere nimmt der gestoppte Prozeß* $\mathbf{X}^\tau$ *Werte im Intervall* $[G(-\infty), G(+\infty)]$ *an.*

Beweis: Über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sei $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ auf Ω. Also ist sowohl $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ als auch $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal, so daß $\mathbf{X}$ zusammen mit $\mathbf{M}$ Gleichung (4.3.13) für $t \geq 0$ $\mathbf{P}$-f. s. erfüllt und $\mathbf{P}_{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ gilt. Mit der $\mathbb{F}$-Stoppzeit τ aus (4.3.14) ist der gestoppte Prozeß $\mathbf{X}^\tau$ ebenfalls ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal. Für dessen Explosionszeit gilt aufgrund der Voraussetzung $S_\infty^{\mathbf{X}^\tau} = +\infty$ auf Ω. Darüber hinaus folgt aus der Stetigkeit von $\mathbf{X}$, daß $\mathbf{X}^\tau$ Werte aus dem abgeschlossenen Intervall $[G(-\infty), G(+\infty)]$ annimmt.

Bleibt uns noch zu zeigen, daß $\mathbf{X}^\tau$ zusammen mit $\mathbf{M}$ Gleichung (4.3.13) für $t \geq 0$ $\mathbf{P}$-f. s. erfüllt. Mit der Stoppregel (2.3.4) erhalten wir aus (4.3.13) zunächst

$$X_{t\wedge\tau} = X_0 + \int_0^t \tilde{b}(X_s) \mathrm{I}_{[\![0,\tau]\!]}(s)\, \mathrm{d}M_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.3.15}$$

Unter Verwendung der Definition von $\tilde{b}$ kann man mit (4.3.9) und (4.3.10) leicht zeigen, daß auf Ω gilt

$$\tilde{b}(X_{t\wedge\tau}) = \tilde{b}(X_t) \mathrm{I}_{[\![0,\tau]\!]}(t) \quad (t \geq 0)\,.$$

Aus der Definition des stochastischen Integrals bzgl. stetiger lokaler Martingale folgt mit (4.3.15) hieraus unmittelbar

$$X_{t\wedge\tau} = X_0 + \int_0^t \tilde{b}(X_{s\wedge\tau})\, \mathrm{d}M_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Damit haben wir gezeigt, daß $(\mathbf{X}^\tau, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist.

Ist $\mathbf{X}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$ adaptiert, so ist τ eine $\mathbb{F}^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$-Stoppzeit. Also ist mit $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ auch $(\mathbf{X}^\tau, \mathbf{M})$ eine starke Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$. Zum Nachweis, daß mit $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ auch $(\mathbf{X}^\tau, \mathbf{M})$ eine Fundamentallösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist, hat man nur die Gültigkeit von $D_{E_{\tilde{b}}^{\mathbf{X}^\tau}} = D_{E_{\tilde{b}}^{\mathbf{X}}} \leq \tau$ auf Ω zu beachten. Diese folgt ebenfalls aus der Definition von $\tilde{b}$ zusammen mit (4.3.9) und (4.3.10), da $E_{\tilde{b}}^c \subseteq]G(-\infty), G(+\infty)[$ in diesem Fall gilt. □

Mit dem vorhergehenden Satz und mit Lemma 4.3.11, der Itô-Meyer-Tanaka-Formel und den Eigenschaften der lokalen Zeit eines stetigen Semimartingals können wir nun folgenden Satz hinsichtlich der Raumtransformation von Lösungen von Gleichung (4.3.1) beweisen.

Satz 4.3.16 *Es sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$.

(i) Ist $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *eine Lösung (bzw. Fundamentallösung, starke Lösung) von* (4.3.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit rechter (bzw. linker, symmetrischer) lokaler Zeit* $L^{\mathbf{X}}$, *dann ist das Paar* $(G \circ \mathbf{X}, \mathbf{M})$ *mit* $G \circ \mathbf{X} := (G(X_t))_{t\geq 0}$ *eine Lösung (bzw. Fundamentallösung, starke Lösung) von* (4.3.13) *bzgl.* $\mathbf{Q}$.

(ii) Ist umgekehrt $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ *eine Lösung (bzw. Fundamentallösung, starke Lösung) von Gleichung* (4.3.13) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit* $\mathbf{Y}^\tau = \mathbf{Y}$ *und* $Y_0 \in]G(-\infty), G(+\infty)[$, *so ist das Paar* $(H \circ \mathbf{Y}, \mathbf{M})$ *mit* $H \circ \mathbf{Y} := (H(Y_t))_{t\geq 0}$ *eine Lösung (bzw. Fundamentallösung, starke Lösung) von* (4.3.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit rechter (bzw. linker, symmetrischer) lokaler Zeit* $L^{\mathbf{X}}$. *Dabei bezeichnet* τ *die Stoppzeit aus* (4.3.14) *für* $\mathbf{Y}$ *anstelle von* $\mathbf{X}$.

Beweis: Der Beweis dieses Satzes verläuft analog dem Beweis von Proposition 1 in [19] bzw. Proposition 4.29 in [20].

Als erstes beweisen wir Aussage (i) des Satzes. Dazu sei $(\mathbf{X},\mathbf{M})$ eine Lösung von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit rechter (bzw. linker, symmetrischer) lokaler Zeit $L^{\mathbf{X}}$, welche über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ definiert ist. Mit $S_\infty^{\mathbf{X}}$ bezeichnen wir wie gewohnt die Explosionszeit von $\mathbf{X}$. Entsprechend der Definition einer Lösung ist $\mathbf{X}$ ein stetiges $(\mathbb{F},\,\mathbf{P})$-Semimartingal auf $[\![0,S_\infty^{\mathbf{X}}[\![$, und es gilt

$$X_t = X_0 + \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a) + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s \quad \text{auf} \quad [\![0,S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.3.17}$$

Da die Funktion g auf $\mathbb{R}$ jeweils für den Fall der rechten (bzw. linken, symmetrischen) lokalen Zeit $L^{\mathbf{X}}$ von lokal beschränkter Variation und strikt positiv ist, läßt sich g als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen auf $\mathbb{R}$ darstellen, welche nichtnegativ sind. Für jede nichtnegative monoton wachsende Funktion existieren sowohl die links- als auch die rechtsseitigen Grenzwerte, und diese sind ebenfalls nichtnegativ. Damit ist die durch (4.3.8) definierte Funktion G Differenz zweier konvexer Funktionen auf $\mathbb{R}$.

Über $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ betrachten wir nun den stochastischen Prozeß $\mathbf{Y}=(Y_t)_{t\geq 0}$ mit $Y_t := G(X_t)$ für $t\geq 0$. Dann ist wegen $\mathbf{1.}(i)$ von Definition 4.1.3 zunächst $\mathbf{Y}$ ein stetiger $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ mit $Y_0 \in]G(-\infty),G(+\infty)[\,\subseteq \mathbb{R}$. Darüber hinaus ist es nicht schwierig, $S_\infty^{\mathbf{X}} \leq S_\infty^{\mathbf{Y}}$ auf Ω zu zeigen, woraus $Y_{t\wedge S_\infty^{\mathbf{Y}}} = Y_t$ für $t\geq 0$ folgt. Laut Definition ist $\mathbf{X}$ ein stetiges $(\mathbb{F},\,\mathbf{P})$-Semimartingal auf $[\![0,S_\infty^{\mathbf{X}}[\![$ und da G auf $\mathbb{R}$ Differenz zweier konvexer Funktionen ist, können wir die Itô-Meyer-Tanaka Formel (2.3.13) auf $\mathbf{Y}^{S_n^{\mathbf{X}}}$ für $n\in\mathbb{N}$ anwenden. Mit den Bezeichnungen zu Satz 2.3.12 kann man leicht verifizieren, daß

$$DG(x) = F(g,x) \quad \text{für} \quad x\in\mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}n_G = (-2F(g,\,\cdot\,))\,\mathrm{d}\nu \quad \text{auf} \quad \mathfrak{B}(\mathbb{R})$$

gilt. Somit erhalten wir mit (2.3.13) für den Prozeß $\mathbf{Y}$ zunächst die Beziehung

$$Y_t = G(X_0) + \int_0^t F(g,X_s)\,\mathrm{d}X_s - \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)\,F(g,a)\,\nu(\mathrm{d}a) \quad \text{auf} \quad [\![0,S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Setzt man (4.3.17) in die rechte Seite der obigen Gleichung ein, so gilt

$$\begin{aligned} Y_t = G(X_0) &+ \int_{\mathbb{R}}\int_0^t F(g,X_s)\,L^{\mathbf{X}}(\mathrm{d}s,a)\,\nu(\mathrm{d}a) + \int_0^t F(g,X_s)\,b(X_s)\,\mathrm{d}M_s \\ &- \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)F(g,a)\,\nu(\mathrm{d}a) \quad \text{auf} \quad [\![0,S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \end{aligned}$$

Da für $\mathbf{P}$-fast alle $\omega\in\Omega$ das Maß $L^{\mathbf{X}}(\omega,\mathrm{d}s,a)$ auf $\{s\geq 0:\ X_s(\omega)=a\}\cap[0,S_\infty^{\mathbf{X}}(\omega)[$ konzentriert ist (vgl. (2.3.10)), heben sich die beiden Integrale bzgl. ν auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung auf, und wir erhalten

$$Y_t = G(X_0) + \int_0^t F(g,X_s)\,b(X_s)\,\mathrm{d}M_s \quad \text{auf} \quad [\![0,S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.3.18}$$

Die Funktion g besitzt bekanntlich höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, da sie von lokal beschränkter Variation ist. Aus der Definition stochastischer Integrale bzgl. stetiger lokaler Martingale zusammen mit der Formel für die Aufenthaltszeit (2.3.16) geht (4.3.18) unter Beachtung von $Y_t = G(X_t)$ für $t \geq 0$ über in

$$(4.3.19) \qquad Y_t = Y_0 + \int_0^t g(H(Y_s))\, b(H(Y_s))\, \mathrm{d}M_s \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Somit ist $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal auf $[\![0, S_\infty^{\mathbf{X}}[\![$.

Es bleibt uns noch zu zeigen

$$(4.3.20) \qquad Y_t = Y_0 + \int_0^t \tilde{b}(Y_s)\, \mathrm{d}M_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}\,,$$

wobei $\tilde{b}$ die Funktion aus Lemma 4.3.11 ist. Für den Fall $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. ist (4.3.20) wegen (4.3.19) trivialerweise erfüllt. Bleibt uns also der Fall $\mathbf{P}(\{S_\infty^{\mathbf{X}} < +\infty\}) > 0$. Wegen (4.3.19) genügt es,

$$(4.3.21) \qquad Y_{S_\infty^{\mathbf{X}}} = Y_0 + \int_0^{S_\infty^{\mathbf{X}}} \tilde{b}(Y_s)\, \mathrm{d}M_s \quad \text{auf} \quad \{S_\infty^{\mathbf{X}} < +\infty\} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

zu zeigen, da nach Konstruktion $Y_t = G(X_{S_\infty^{\mathbf{X}}}) = Y_{S_\infty^{\mathbf{X}}}$ und $\tilde{b}(Y_t) = 0$ für $t \geq S_\infty^{\mathbf{X}}$ auf Ω gilt. Nach Definition sind die Trajektorien des Prozesses $\mathbf{X}$ stetig, und wegen der Stetigkeit von G auf $\overline{\mathbb{R}}$ sind die Trajektorien von $\mathbf{Y}$ dann ebenfalls stetig. Somit existiert der Grenzwert $\lim_{t\uparrow S_\infty^{\mathbf{X}}} Y_t$ auf $\{S_\infty^{\mathbf{X}} < +\infty\}$ $\mathbf{P}$-f. s. Entsprechend Theorem 5.21 (c) in [25] (vgl. auch Theorem 3.5 in [33]) gilt, daß $\mathbf{P}$-f. s. entweder der Grenzwert $\lim_{t\uparrow S_\infty^{\mathbf{X}}} Y_t$ existiert und endlich ist oder $\overline{\lim}_{t\uparrow S_\infty^{\mathbf{X}}} |Y_s| = +\infty$. Mit dem Vorherigen folgt dann aber, daß auf $\{S_\infty^{\mathbf{X}} < +\infty\}$ $\mathbf{P}$-f. s. der Grenzwert $\lim_{t\uparrow S_\infty^{\mathbf{X}}} Y_t$ in $\mathbb{R}$ existiert und gleich $Y_{S_\infty^{\mathbf{X}}}$ ist. Gleiches erhält man auch für das stochastische Integral auf der rechten Seite von (4.3.19). Läßt man in (4.3.19) nun t von unten gegen $S_\infty^{\mathbf{X}}$ konvergieren, so erhalten wir hieraus die Richtigkeit von (4.3.21) und damit auch die von (4.3.20).

Nach Konstruktion ist $\mathbf{Y}$ ein stetiger und $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $Y_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{Y}^{S_\infty^{\mathbf{Y}}} = \mathbf{Y}$. Hieraus und mit (4.3.20) folgt dann aber, daß $\mathbf{Y}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal auf $[\![0, S_\infty^{\mathbf{Y}}[\![$ ist. Darüber hinaus ist $\mathbf{M}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal mit $\mathbf{P}_{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Dies bedeutet aber insgesamt, daß $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ im Sinne unserer Definition eine Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist.

Ist darüber hinaus $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine starke Lösung von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$, so ist $\mathbf{X}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$ adaptiert. Mit $X_0 = H(Y_0)$ folgt dann, daß der Prozeß $\mathbf{Y}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{(Y_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$ adaptiert ist. Somit ist $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ ebenfalls eine starke Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$.

Für den Fall, daß $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Fundamentallösung von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist, erhalten wir mit Lemma 4.3.11 die entsprechende Aussage für $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$. Man hat hier $D_{E_{\tilde{b}}}^{\mathbf{Y}} = D_{E_b}^{\mathbf{X}}$ zu beachten.

Als nächstes wollen wir die Aussage (ii) des Satzes beweisen. Dazu sei $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ definiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$, so daß $\mathbf{Y}^\tau = \mathbf{Y}$ und $Y_0 \in]G(-\infty), G(\infty)[$ gilt, wobei τ die Stoppzeit aus **(4.3.14)** für $\mathbf{Y}$ kennzeichnet. Nach Definition ist $\mathbf{M}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $\mathbf{P_M} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Darüber hinaus ist $\mathbf{Y}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozeß mit stetigen Trajektorien, so daß $\mathbf{Y}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal auf $[\![0, S^{\mathbf{Y}}_\infty[\![$ ist, für welches **(4.3.13)** für $t \geq 0$ $\mathbf{P}$-f. s. gilt. Insbesondere nimmt $\mathbf{Y}$ Werte im Intervall $[G(-\infty), G(+\infty)]$ an, und es gilt $S^{\mathbf{Y}}_\infty = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s.

Wir setzen $X_t = H(Y_t)$ für $t \geq 0$. Dann ist $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $X_0 = H(Y_0) \in \mathbb{R}$ und

$$S^{\mathbf{X}}_\infty = \inf\{s \geq 0 \,:\, Y_s \notin\,]G(-\infty), G(+\infty)[\,\} = \tau \leq S^{\mathbf{Y}}_\infty$$

auf Ω. Hieraus folgt dann $S^{\mathbf{X}}_n < S^{\mathbf{Y}}_\infty$ auf $\{S^{\mathbf{Y}}_\infty < +\infty\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Da $\mathbf{Y}$ die Darstellung **(4.3.13)** besitzt und $S^{\mathbf{Y}}_\infty = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. gilt, ist $\mathbf{Y}$ sogar ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal auf $[\![0, S^{\mathbf{X}}_\infty[\![$.

Auf dem offenen Intervall $]G(-\infty), G(+\infty)[$ ist die Funktion H darstellbar als Differenz zweier konvexer Funktionen, da die Funktion h auf diesem Intervall von lokal beschränkter Variation ist und somit dort als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen dargestellt werden kann. Des weiteren nimmt für ein beliebiges $\omega \in \Omega$ die Trajektorie $\mathbf{Y}(\omega)$ auf $[0, S^{\mathbf{X}}_\infty(\omega)[$ Werte im offenen Intervall $]G(-\infty), G(+\infty)[$ an. Somit gilt für die rechte (bzw. linke, symmetrische) lokale Zeit $L^{\mathbf{Y}}$ von $\mathbf{Y}$

$$L^{\mathbf{Y}}(\,\cdot\,, a) = 0 \quad \text{für} \quad a \notin\,]G(-\infty), G(+\infty)[\quad \text{auf} \quad [\![0, S^{\mathbf{X}}_\infty[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.3.22}$$

Anwendung der Itô-Meyer-Tanaka-Formel **(2.3.13)** liefert mit der rechten (bzw. linken, symmetrischen) lokalen Zeit von $\mathbf{Y}$ zunächst folgende Darstellung für den gestoppten Prozeß $\mathbf{X}^{S^{\mathbf{X}}_n}$:

$$X_t = H(Y_0) + \int_0^t F(h, Y_s)\,\mathrm{d}Y_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{Y}}(t, a)\, n_H(\mathrm{d}a) \quad \text{auf} \quad [\![0, S^{\mathbf{X}}_\infty[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.},$$

wobei in diesem Fall

$$DH(x) = F(h, x) \quad \text{für} \quad x \in]G(-\infty), G(+\infty)[$$

gilt und n_H unter Beachtung von **(4.3.22)** das auf $\mathfrak{B}(]G(-\infty), G(+\infty)[)$ definierte Maß der zweiten Ableitung von H im Sinne von Distributionen bezeichnet. Insbesondere ist dann $\mathbf{X}$ ein stetiges $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Semimartingal auf $[\![0, S^{\mathbf{X}}_\infty[\![$.

Da die Funktion h auf $]G(-\infty), G(+\infty)[$ von lokal beschränkter Variation ist, besitzt h höchstens abzählbar viele Sprungstellen auf $]G(-\infty), G(+\infty)[$. Unter Verwendung der Formel für die Aufenthaltszeit **(2.3.16)** kann daher der Integrand im Martingalanteil der rechten Seite von X_t durch h ersetzt werden, und wir erhalten

$$X_t = X_0 + \int_0^t h(Y_s)\,\mathrm{d}Y_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{Y}}(t, a)\, n_H(\mathrm{d}a) \quad \text{auf} \quad [\![0, S^{\mathbf{X}}_\infty[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Mit der Darstellung **(4.3.13)** für den Lösungsprozeß $\mathbf{Y}$ geht dann obige Gleichung unter Beachtung der Definition von h, $\tilde{b}$ und $\mathbf{X}$ schließlich über in

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{Y}}(t, a)\, n_H(\mathrm{d}a) \quad \text{auf} \quad [\![0, S^{\mathbf{X}}_\infty[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.3.23}$$

Als nächstes betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{Y}}(\,\cdot\,,a)\,n_H(\mathrm{d}a)\,.$$

Eine elementare Rechnung zeigt, daß

$$\mathrm{d}n_H = (-2\tilde{F}(h,\,\cdot\,))\,\mathrm{d}(\nu\circ G^{-1}) \quad \text{auf} \quad \mathfrak{B}(]G(-\infty),G(+\infty)[) \tag{4.3.24}$$

gilt. Wie im Beweis von Proposition 4.29 (iii) in [20] verifiziert man für die lokale Zeit $L^{\mathbf{X}}$ von $\mathbf{X}$ die Beziehung

$$L^{\mathbf{X}}(t,a) = -\tilde{F}(g^{-1},a)\,L^{\mathbf{Y}}(t,G(a)) \quad \text{für} \quad a\in\mathbb{R} \quad \text{auf} \quad [\![0,S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.3.25}$$

Zusammen mit (4.3.22) und (4.3.24) erhalten wir dann hieraus

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{Y}}(t,a)\,n_H(\mathrm{d}a) &= -\int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{Y}}(t,G(a))\,\tilde{F}(g^{-1},a)\,\nu(\mathrm{d}a)\\ &= \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a) \quad \text{auf} \quad [\![0,S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}\end{aligned}$$

Setzt man dies in Gleichung (4.3.23) ein, so erhalten wir für $\mathbf{X}$ die Darstellung

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s + \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a) \quad \text{auf} \quad [\![0,S_\infty^{\mathbf{X}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Dies bedeutet nun aber insgesamt, daß zusammen mit den vorhergehenden Ausführungen $(\mathbf{X},\mathbf{M})$ eine Lösung von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit rechter (bzw. linker, symmetrischer) lokaler Zeit $L^{\mathbf{X}}$ ist. Ist darüber hinaus der Lösungsprozeß $\mathbf{Y}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{(Y_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$ adaptiert, so ist wegen $Y_0 = G(X_0)$ der Prozeß $\mathbf{X}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$ adaptiert. Somit ist $(\mathbf{X},\mathbf{M})$ eine starke Lösung von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$. Für den Fall, daß $(\mathbf{Y},\mathbf{M})$ eine Fundamentallösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist, erhalten wir ebenfalls mit Lemma 4.3.11, daß $(\mathbf{X},\mathbf{M})$ eine Fundamentallösung von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. □

Als Folgerung zu diesem Satz können wir festhalten:

Folgerung 4.3.26 *Sei $\mathbf{Q}\in\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$, und sei $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$. Weiterhin seien $\mathbf{M}=(M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F},\mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ mit $\mathbf{P_M}=\mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ und $\mathbf{X}=(X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ mit $\mathbf{X}^{S_\infty^{\mathbf{X}}}=\mathbf{X}$ und $X_0\in\mathbb{R}$. Dann ist $(\mathbf{X},\mathbf{M})$ eine Lösung (bzw. Fundamentallösung, starke Lösung) von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ genau dann, wenn $(G\circ\mathbf{X},\mathbf{M})$ eine Lösung (bzw. Fundamentallösung, starke Lösung) von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist.*

Beweis: Die Notwendigkeit der Aussage ergibt sich unmittelbar aus Satz 4.3.16 (i). Unter den angegebenen Voraussetzungen kann man leicht überprüfen, daß der Prozeß $G\circ\mathbf{X}=(G(X_t))_{t\geq 0}$ die Bedingungen aus Satz 4.3.16 (ii) erfüllt. Wegen $H(G(X_t))=X_t$ für $t\geq 0$ folgt dann hieraus auch die Richtigkeit der Hinlänglichkeit der Aussage. □

Mit Satz 4.3.16 können wir nun ein entsprechendes Analogon zu Satz 4.2.14 beweisen. An dieser Stelle sei schon einmal darauf hingewiesen, daß wir weitere Eigenschaften der Trajektorien des Lösungsprozesses im nächsten Abschnitt betrachten werden.

Satz 4.3.27 *Es seien* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *und* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *eine Lösung von* (4.3.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$. *Dann gilt für den Lösungsprozeß* $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$:

(a) $\mathbf{X}^{D^{\mathbf{X}}_{E_b}} = \mathbf{X}$ *f. s.*

(b) $\langle \mathbf{X} \rangle^{D^{\mathbf{X}}_{E_b}} = \langle \mathbf{X} \rangle$ *f. s.*

(c) $L^{\mathbf{X}}(\,\cdot\,, a) = 0$ *für* $a \in E_b$ *auf* $[\![0, S^{\mathbf{X}}_\infty[\![$ *f. s.*

Beweis: Sei $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$. Gemäß Satz 4.3.16 (i) ist dann $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ mit $\mathbf{Y} = (G(X_t))_{t\geq 0}$ eine Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$. Aus Lemma 4.3.11 folgt wegen der strengen Monotonie von G auf $\mathbb{R}$ zunächst $D^{\mathbf{X}}_{E_b} = D^{\mathbf{Y}}_{E_{\tilde{b}}}$, wobei $\tilde{b}$ die Funktion aus Lemma 4.3.11 bezeichnet. Zusammen mit Satz 4.2.14 (b) angewandt auf $\mathbf{Y}$ und $\tilde{b}$ erhalten wir

$$G(X_{t\wedge D^{\mathbf{X}}_{E_b}}) = Y_{t\wedge D^{\mathbf{X}}_{E_b}} = Y_{t\wedge D^{\mathbf{Y}}_{E_{\tilde{b}}}} = Y_t = G(X_t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Die strenge Monotonie von G liefert die Gültigkeit von Aussage (a).

Um Aussage (b) zu zeigen, ist zunächst zu beachten, daß nach Definition von $\langle \mathbf{X} \rangle$ gilt

$$\langle X \rangle_{t\wedge S^{\mathbf{X}}_\infty} = \langle X \rangle_t \quad \text{für} \quad t \geq 0\,.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Zerlegung eines stetigen Semimartingals und der Definition des quadratischen Variationsprozesses für Semimartingale über den quadratischen Variationsprozeß des Martingalanteils des Semimartingals erhalten wir mit (a) und (2.2.5)

$$\langle \mathbf{X} \rangle^{D^{\mathbf{X}}_{E_b}} = \langle \mathbf{X}^{D^{\mathbf{X}}_{E_b}} \rangle = \langle \mathbf{X} \rangle \quad \text{auf} \quad [\![0, S^{\mathbf{X}}_\infty[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Hieraus folgt die Richtigkeit von (b). Schließlich folgt (c) aus Satz 4.2.14 (a), Lemma 4.3.11 und Satz 4.3.16 (i) unter Verwendung von (4.3.25). □

Bemerkung 4.3.28 Wegen Eigenschaft (c) des vorhergehenden Satzes kann die Mengenfunktion ν so gewählt werden, daß ν auf E_b verschwindet.

Nun wollen wir zum Hauptresultat dieses Kapitels kommen, welches allgemeine Bedingungen an den Diffusionskoeffizienten b formuliert, unter denen bei gegebenem $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ eine Lösung von Gleichung (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ existiert. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß wir in den folgenden Betrachtungen den Fall eines trivialen Prozesses als treibenden Prozeß ausschließen wollen. Darüber hinaus wollen wir an die Ausführungen des Abschnitts 3.2 erinnern und insbesondere daran, wie man aus einer gegebenen Brownschen Bewegung ein stetiges lokales Martingal konstruieren kann, welches eine vorgegebene Verteilung aus $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ besitzt. Die Definition einer Lösung von Gleichung (4.3.1) besagt ja nämlich, daß man sich für ein gegebenes $\mathbf{Q}$ aus $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ neben dem Lösungsprozeß ein stetiges lokales Martingal mit der Verteilung $\mathbf{Q}$ besorgen muß, so daß beide Prozesse Gleichung (4.3.1) im Sinne unserer Definition lösen. Das Problem hierbei ist, daß die Konstruktion des treibenden Prozesses nicht von einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum ausgehen kann, sondern von einem noch geeignet zu suchenden Wahrscheinlichkeitsraum startet, welcher schon gute Eigenschaften hinsichtlich einer Lösung von (4.3.1) mitbringt. Hierbei wird der Satz 3.2.52 grundlegend von Nutzen sein. Zuvor wollen wir noch folgendes Lemma beweisen, wobei an die Definition der ersten Eintrittszeit eines stochastischen Prozesses in eine Borelsche Menge erinnert sei (vgl. (2.1.2)).

Lemma 4.3.29 *Seien $B \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ eine abgeschlossene Menge und $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger stochastischer Prozeß über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $\mathbf{Y}^{\tau_B^{\mathbf{Y}}} = \mathbf{Y}$. Bezeichnet $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ die Rechtsinverse eines stochastischen Prozesses $\mathbf{A} = (A_t)_{t\geq 0}$ mit Trajektorien in E_+, dann gilt für den zeittransformierten Prozeß $\mathbf{X} := \mathbf{Y} \circ \mathbf{A}$*

$$\tau_B^{\mathbf{X}} = T_{\tau_B^{\mathbf{Y}}-}\,, \tag{4.3.30}$$

wobei $T_{t-} := \lim\limits_{s\uparrow t} T_t$ für alle $t \in]0, +\infty]$ mit der Konvention $T_{0-} = 0$. Insbesondere ist $A_{\tau_B^{\mathbf{X}}} \leq \tau_B^{\mathbf{Y}}$.

Beweis: Der zweite Teil der Aussage folgt mit (2.4.5) trivialerweise aus (4.3.30). Bleibt uns somit die Richtigkeit von (4.3.30) zu zeigen. Auf der Menge $\{\tau_B^{\mathbf{Y}} = +\infty\}$ ist (4.3.30) erfüllt, denn in diesem Fall ist zum einen $\tau_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ und zum anderen gilt $\lim\limits_{s\uparrow\tau_B^{\mathbf{Y}}} T_s = +\infty$.

Auf der Menge $\{\tau_B^{\mathbf{Y}} < +\infty\}$ gilt zunächst

$$T_{\tau_B^{\mathbf{Y}}-} = \inf\{s \geq 0 \,:\, A_s \geq \tau_B^{\mathbf{Y}}\} \leq \tau_B^{\mathbf{X}}\,.$$

Dies folgt aus der Stetigkeit von $\mathbf{Y}$ und der Abgeschlossenheit von B, denn für alle $s \geq 0$ mit $A_s \geq \tau_B^{\mathbf{Y}}$ gilt nämlich wegen $\mathbf{Y}^{\tau_B^{\mathbf{Y}}} = \mathbf{Y}$

$$X_s = Y_{A_s\wedge\tau_B^{\mathbf{Y}}} = Y_{\tau_B^{\mathbf{Y}}} \in B\,.$$

Andererseits ist $A_t < \tau_B^{\mathbf{Y}}$ und damit $X_t \notin B$ für $t < T_{\tau_B^{\mathbf{Y}}-}$, woraus $\tau_B^{\mathbf{X}} \geq T_{\tau_B^{\mathbf{Y}}-}$ folgt. Insgesamt haben wir somit die Richtigkeit von (4.3.30) gezeigt. □

Theorem 4.3.31 *Gegeben sei ein $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Für jede Startverteilung existiert eine Fundamentallösung von Gleichung (4.3.1) *bzgl. $\mathbf{Q}$.*

(b) Für jede Startverteilung existiert eine Lösung von Gleichung (4.3.1) *bzgl. $\mathbf{Q}$.*

(c) Es gilt $E_b \subseteq N_b$.

Beweis: Zunächst sieht man sofort, daß aus Bedingung (a) trivialerweise (b) folgt.

Als nächstes zeigen wir, daß aus der Existenzbedingung (b) die Inklusion in (c) folgt. Sei dazu $x_0 \in E_b$ beliebig gewählt. Entsprechend (b) existiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ eine Lösung $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ von Gleichung (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung δ_{x_0}. Wegen $X_0 = x_0$ $\mathbf{P}$-f. s. ist $D_{E_b}^{\mathbf{X}} = 0$ $\mathbf{P}$-f. s. Gemäß Satz 4.3.27 (a) gilt $X_t = x_0$ für alle $t \geq 0$ $\mathbf{P}$-f. s. Für die Explosionszeit von $\mathbf{X}$ erhalten wir hieraus $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. Also ist der Lösungsprozeß $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ konstant $\mathbf{P}$-f. s. Somit ist $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine triviale Lösung von Gleichung (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$. Für den quadratischen Variationsprozeß des Lösungsprozesses gilt dann

$$0 = \langle X^{S_n^{\mathbf{X}}}\rangle_t = \int\limits_0^t b^2(X_s^{S_n^{\mathbf{X}}})\,\mathrm{d}\langle M\rangle_{s\wedge S_n^{\mathbf{X}}} = b^2(x_0)\langle M\rangle_{t\wedge S_n^{\mathbf{X}}}\,, \quad t \geq 0\,, n \in \mathbb{N}\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}\,,$$

woraus mit $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. folgt

$$0 = b^2(x_0)\langle M\rangle_t\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.3.32}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty > 0\}) > 0$. Mit Satz 3.1.6 gilt dann entsprechend $\mathbf{P}(\{\langle M\rangle_\infty > 0\}) > 0$, woraus mit **(4.3.32)** unmittelbar $b(x_0) = 0$ folgt. Denn bezeichnet N die $\mathbf{P}$-Nullmenge aus **(4.3.32)**, so muß $N^c \cap \{\langle M\rangle_\infty > 0\} \neq \emptyset$ gelten. Also gibt es ein $\omega \in N^c$ und ein $t \geq 0$, so daß $\langle M\rangle_t(\omega) > 0$ gilt. Damit erhalten wir aber $x_0 \in N_b$, womit wir die Inklusion $E_b \subseteq N_b$ bewiesen haben.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß Bedingung (c) auch hinreichend für die Existenz einer Fundamentallösung und damit auch einer Lösung von Gleichung **(4.3.1)** bzgl. $\mathbf{Q}$ für beliebige Startverteilungen ist. Dazu sei die Bedingung $E_b \subseteq N_b$ erfüllt, und μ sei ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Die Aufgabe besteht nun darin, einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration sowie einen stochastischen Prozeß mit Startverteilung μ nebst stetigem lokalen Martingal zu konstruieren, so daß das stetige lokale Martingal die Verteilung $\mathbf{Q}$ besitzt und zusammen mit dem gefundenen stochastischen Prozeß eine Lösung von **(4.3.1)** bildet.

Aus der Bedingung $E_b \subseteq N_b$ folgt mit der Funktion $\tilde{b}$ aus Lemma 4.3.11 zunächst $E_{\tilde{b}} \subseteq N_{\tilde{b}}$. Gemäß einem bekannten Resultat von Engelbert und Schmidt (vgl. Theorem 1 in [19] bzw. Theorem 4.17 in [20]) existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ sowie eine über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ definierte Fundamentallösung $(\mathbf{Y}, \mathbf{B})$ von Gleichung **(4.3.13)** bzgl. $\mathbb{W}$ mit $\mathbf{P}_{Y_0} = \mu \circ G^{-1}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Entsprechend unserer Definition einer Lösung ist $\mathbf{B} = (B_t)_{t\geq 0}$ eine $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung und $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $Y_0 \in \mathbb{R}$. Dabei können wir nach Satz 4.2.2 ohne Einschränkung annehmen, daß $\mathbf{Y}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal ist mit $S_\infty^{\mathbf{Y}} = +\infty$ auf Ω. Darüber hinaus können wir $Y_0 \in]G(-\infty), G(+\infty)[$ wegen $\mathbf{P}_{Y_0} = \mu \circ G^{-1}$ und nach Satz 4.3.12 auch $\mathbf{Y}^\sigma = \mathbf{Y}$ auf Ω annehmen, wobei $\sigma := \inf\{s \geq 0 : Y_s \notin]G(-\infty), G(+\infty)[$. Für $\mathbf{Y}$ gilt dann insbesondere

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \tilde{b}(Y_s)\,\mathrm{d}B_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.3.33}$$

Nun wissen wir aus Theorem 3.2.46, daß das Maß $\mathbf{Q}$ durch einen zulässigen Markov-Kern $K_{\mathbf{Q}}$ von $(\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ nach $(E_+, \mathfrak{B}(E_+))$ beschrieben wird, welcher $\mathbf{Q}_{Z_0} \otimes \mathbb{W}$-f. s. ununterscheidbar ist. Unter Verwendung dieses Markov-Kernes betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ in $\tilde{\mathcal{F}}$ aus dem Beweis von Satz 3.2.52. Es ist also

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega} &:= \mathbb{R} \times \Omega \times E_+\,, \quad \tilde{\mathcal{F}}^o := \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(E_+)\,,\\
\tilde{\mathbf{P}}(\Gamma) &:= \int_\Omega \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{E_+} \mathrm{I}_\Gamma(x_0, \omega, \mathbf{a})\, K_{\mathbf{Q}}(x_0, \mathbf{B}(\omega), \mathrm{d}\mathbf{a})\Big)\, \mathbf{Q}_{Z_0}(\mathrm{d}x_0)\Big)\, \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) \quad (\Gamma \in \tilde{\mathcal{F}})\,,\\
\tilde{\mathcal{F}}_t &:= \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{D}_t \quad (t \geq 0)\,,
\end{aligned}$$

und $\tilde{\mathcal{F}}$ ist die Vervollständigung von $\tilde{\mathcal{F}}^o$ bzgl. $\tilde{\mathbf{P}}$.

Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\tilde{\mathbb{F}}$ ist, wie im Beweis von Satz 3.2.52 bereits gezeigt wurde, eine Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mathbb{F}$. Über dieser Erweiterung betrachten wir die beiden Prozesse $\tilde{\mathbf{Y}} = (\tilde{Y}_t)_{t\geq 0}$ und $\tilde{\mathbf{B}} = (\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$, wobei diese in kanonischer Weise über die Prozesse $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{B}$ definiert werden. Nach Satz 3.1.14 ist $\tilde{\mathbf{B}}$ eine $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Brownsche Bewegung und $\tilde{\mathbf{Y}}$ ein stetiges lokales $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal, und es gilt

(4.3.34) $$\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_0 + \int_0^t \tilde{b}(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}\tilde{B}_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.}$$

Darüber hinaus ist $\tilde{Y}_0 \in]G(-\infty), G(+\infty)[\,$, $\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{Y}_0} = \mu \circ G^{-1}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $S_\infty^{\tilde{\mathbf{Y}}} = +\infty$ und $\tilde{\mathbf{Y}}^{\tilde{\sigma}} = \tilde{\mathbf{Y}}$. Also ist $(\tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{B}})$ über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ eine Lösung und auch eine Fundamentallösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbb{W}$ mit Startverteilung $\mu \circ G^{-1}$. Letzteres folgt aus der Eigenschaft, daß $(\mathbf{Y}, \mathbf{B})$ eine Fundamentallösung ist und $\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{\mathbf{Y}}} = \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ gilt.

Entsprechend dem Beweis von Satz 3.2.52 definieren wir für $\tilde{\omega} = (x_0, \omega, \mathbf{a}) \in \tilde{\Omega}$ folgende Größen

$$M_0^*(\tilde{\omega}) = x_0, \quad A_t(\tilde{\omega}) = \mathbf{a}(t) \quad (t \geq 0)$$

Dann ist M_0^* eine Zufallsgröße mit $\tilde{\mathbf{P}}_{M_0^*} = \mathbf{Q}_{Z_0}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{A} = (A_t)_{t\geq 0}$ eine endliche $\tilde{\mathbb{F}}$-Zeittransformation mit Trajektorien in E_+. Damit definieren wir den Prozeß $\mathbf{M}^* = (M_t^*)_{t\geq 0}$ durch

(4.3.35) $$M_t^* := M_0^* + \tilde{B}_{A_t} = \bar{\varphi}(M_0^*, \tilde{\mathbf{B}}, \mathbf{A})(t) \quad (t \geq 0)\,.$$

Aus Satz 3.2.52 wissen wir bereits, daß $\mathbf{M}^*$ ein stetiges lokales $(\tilde{\mathbb{F}} \circ \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal ist, so daß $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{M}^*} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ und $\langle \mathbf{M}^* \rangle = \mathbf{A}$ $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. gilt.

Als nächstes betrachten wir über $\tilde{\Omega}$ den zeittransformierten Prozeß $\mathbf{X} := \tilde{\mathbf{Y}} \circ \mathbf{A}$. Mit Satz 2.4.8 (a) folgt aus der Endlichkeit und Stetigkeit der $\tilde{\mathbb{F}}$-Zeittransformation $\mathbf{A}$, daß $\mathbf{X}$ ein stetiges lokales $(\tilde{\mathbb{F}} \circ \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{P}})$-Martingal ist. Des weiteren gilt $X_0 \in]G(-\infty), G(+\infty)[\,$, $\tilde{\mathbf{P}}_{X_0} = \mu \circ G^{-1}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ und $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$. Mit Lemma 4.3.29 haben wir darüber hinaus $\mathbf{X}^\tau = \mathbf{X}$ mit der $\tilde{\mathbb{F}} \circ \mathbf{A}$-Stoppzeit τ aus (4.3.14) (vgl. auch die Definition von σ). Dies folgt mit (2.4.5) aus der $\mathbf{T}$-Stetigkeit des Prozesses $\mathbf{X}$, wobei $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ die Rechtsinverse von $\mathbf{A}$ bezeichnet. Führt man in (4.3.34) mittels $\mathbf{A}$ eine Zeittransformation durch, so erhalten wir mit Satz 2.4.8 (b) unter Verwendung von (4.3.35) und (2.2.10)

(4.3.36) $$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{b}(X_s)\,\mathrm{d}M_s^*\,, \quad t \geq 0\,, \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.}$$

Somit ist $(\mathbf{X}, \mathbf{M}^*)$ eine Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ und insbesondere auch eine Fundamentallösung. Dies folgt daraus, daß mit Lemma 4.3.29 wegen $\langle \mathbf{M}^* \rangle = \mathbf{A}$ $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. zum einen $\langle M^* \rangle_{D^{\mathbf{X}}_{E_{\tilde{b}}}} \leq D^{\tilde{\mathbf{Y}}}_{E_{\tilde{b}}}$ $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. gilt. Zum anderen ist $(\tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{B}})$ eine Fundamentallösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbb{W}$, woraus mit Satz 2.4.6 folgt

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}\Big(\int_0^{D^{\mathbf{X}^*}_{E_{\tilde{b}}}} \mathrm{I}_{N_{\tilde{b}}}(X_s)\,\mathrm{d}\langle M^* \rangle_s \Big) \leq \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}\Big(\int_0^{D^{\tilde{\mathbf{Y}}}_{E_{\tilde{b}}}} \mathrm{I}_{N_{\tilde{b}}}(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}s \Big) = 0\,.$$

Also ist $(\mathbf{X}, \mathbf{M}^*)$ eine Fundamentallösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Startverteilung $\mu \circ G^{-1}$. Nach Konstruktion erfüllt das Paar $(\mathbf{X}, \mathbf{M}^*)$ die Voraussetzung von Satz 4.3.16 (ii), woraus dann aber insgesamt folgt, daß das über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ definierte Paar $(\mathbf{X}^*, \mathbf{M}^*)$ mit $\mathbf{X}^* := (H(X_t))_{t\geq 0}$ eine Fundamentallösung von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung μ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ist. Damit ist das Theorem bewiesen. □

Bemerkung 4.3.37 (1) Daß für beliebige Startverteilungen eine Fundamentallösung von Gleichung (4.3.13) bzgl. des Wiener-Maßes $\mathbb{W}$ existiert, folgt aus dem Beweis von Theorem 1 in [19]. Es ist nicht schwierig zu zeigen, daß der im Beweis von Theorem 1 in [19] konstruierte Lösungsprozeß die Eigenschaft einer Fundamentallösung besitzt.

(2) Ebenfalls lassen die Beweise von Theorem 1 in [19] bzw. Theorem 4.17 in [20] erkennen, daß man eine Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbb{W}$ aus einer zeittransformierten Brownschen Bewegung gewinnt. Mit der Zeittransformation $\mathbf{A}$ aus Theorem 4.3.31 folgt dann aber, daß auch der Lösungsprozeß von Gleichung (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ aus einer zeittransformierten Brownschen Bewegung hervorgeht. Mit Satz 4.3.16 (ii) gewinnt man somit einen Lösungsprozeß von Gleichung (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ aus einer zeittransformierten Brownschen Bewegung mit anschließender Raumtransformation, sofern die Existenzbedingung $E_b \subseteq N_b$ erfüllt ist.

(3) Man beachte, daß die Existenzbedingung aus Theorem 4.3.31 rein analytischer Natur ist. Abgesehen von den Voraussetzungen an ν, bezieht sich die Bedingung dort allein auf den Diffusionskoeffizienten b. Darüber hinaus sei angemerkt, daß wir bis auf die Nichttrivialität des treibenden Prozesses keine weiteren Bedingungen an das Martingalmaß $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ gestellt haben.

Im folgenden wollen wir hinreichende Bedingungen dafür formulieren, wann die Existenzbedingung in Theorem 4.3.31 (c) erfüllt ist.

Folgerung 4.3.38 *Sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. *Angenommen auf* $\mathbb{R}$ *existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Funktion* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *gelte* $x \in N_b$, *falls* $|b(x+)| \wedge |b(x-)| = 0$ *erfüllt ist. Dann existiert für jede Startverteilung eine Lösung von Gleichung* (4.3.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$.

Beweis: Gemäß Theorem 4.3.31 genügt es zu zeigen, daß aus obiger Bedingung die Inklusion $E_b \subseteq N_b$ folgt. Dazu sei $x \in N_b^c$. Entsprechend der Voraussetzung folgt dann $b(x+) \neq 0$ und $b(x-) \neq 0$. Zusammen mit der Existenz der links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Funktion b folgt aber hieraus, daß b^2 in einer Umgebung von x durch eine von Null verschiedene Konstante nach unten beschränkt ist. Also ist b^{-2} in einer Umgebung von x beschränkt, woraus aber unmittelbar $x \in E_b^c$ folgt. Da x beliebig gewählt war, gilt somit $N_b^c \subseteq E_b^c$ und damit auch $E_b \subseteq N_b$. □

Interessant ist nun auch die Frage, ob und unter welchen Bedingungen nichttriviale Lösungen von (4.3.1) existieren. Wie wir bereits wissen, ist im Falle eines trivialen $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$, also $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty = 0\}) = 1$, jede Lösung von Gleichung (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ trivial. Wie im Falle der Brownschen Bewegung als treibenden Prozeß gilt:

Folgerung 4.3.39 *Sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *mit* $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty > 0\}) > 0$. *Existiert für jede Startverteilung eine nichttriviale Lösung von* (4.3.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$, *so ist* b^{-2} *bzgl. des Lebesgue-Maßes lokal integrierbar. Ist* $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty = +\infty\}) = 1$, *so gilt sogar die Umkehrung.*

Beweis: Sei $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ mit $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty > 0\}) > 0$. Nach Voraussetzung existiert für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ eine nichttriviale Lösung $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung δ_{x_0}, welche über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ definiert ist. Unter Verwendung von Satz 4.3.16 (i) ist wegen der strengen Monotonie von G auch $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ mit $\mathbf{Y} := (G(X_t))_{t\geq 0}$ eine nichttriviale Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung $\delta_{G(x_0)}$. Ohne Einschränkung sei $\mathbf{Y}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal mit $Y_0 = G(x_0)$.

Bezeichne $\mathbf{C} = (C_t)_{t\geq 0}$ die Rechtsinverse von $\langle \mathbf{Y} \rangle = (\langle Y \rangle_t)_{t\geq 0}$. Analog dem Beweis von Satz 4.2.6 gilt

$$\int_0^{t\wedge\langle Y\rangle_\infty} \tilde{b}^{-2}(G(x_0) + W_s)\,\mathrm{d}s \leq \langle M \rangle_{C_t}\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.3.40}$$

Dabei ist $\tilde{b}$ die Funktion aus Lemma 4.3.11, und $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ ist die in $\langle Y \rangle_\infty$ gestoppte $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{C},\, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, für die gilt

$$\mathbf{Y} = G(x_0) + \mathbf{W} \circ \langle \mathbf{Y} \rangle \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Da der Lösungsprozeß $\mathbf{Y}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht konstant ist, folgt $\mathbf{P}(\{\langle Y \rangle_\infty > 0\}) > 0$. Somit existiert eine strikt positive zufällige Zeit $\overline{\tau}$ über Ω mit

$$\overline{\tau} < \langle Y \rangle_\infty \quad \text{auf} \quad \{\langle Y \rangle_\infty > 0\} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.3.41}$$

Dies folgt aus Theorem III.44 und Bemerkung III.45 in [8] angewandt auf die Menge $\{(\omega, t) \in \Omega\times]0, +\infty] : \langle Y \rangle_\infty(\omega) > t\}$ und unter Verwendung des bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}(\,.\,|\{\langle Y \rangle_\infty > 0\})$ auf $\mathcal{F}$. Aus (4.3.40) folgt dann hiermit

$$\int_0^{\overline{\tau}} \tilde{b}^{-2}(G(x_0) + W_s)\,\mathrm{d}s \leq \langle M \rangle_{C_{\overline{\tau}}} < +\infty \quad \text{auf} \quad \{\langle Y \rangle_\infty > 0\} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.3.42}$$

Geht man zu einer $(\mathbf{Y},\, \mathbf{P})$-Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}},\, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mathbb{F}$ über, so folgt aus (4.3.42) zusammen mit (4.3.41)

$$\tilde{\mathbf{P}}(\{\int_0^{\tilde{\overline{\tau}}} \tilde{b}^{-2}(G(x_0) + B_s^*)\,\mathrm{d}s < +\infty\}) > 0\,.$$

Mit dem Lemma in [17] erhalten wir hieraus $G(x_0) \in E_{\tilde{b}}^c$, was aber mit Lemma 4.3.11 äquivalent zu $x_0 \in E_b^c$ ist. Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war, gilt $E_b^c = \mathbb{R}$, und somit ist b^{-2} bzgl. des Lebesgue-Maßes lokal integrierbar.

Für die Umkehrung der Aussage seien nun $\mathbf{Q}(\{\langle Z \rangle_\infty = +\infty\}) = 1$ und b^{-2} bzgl. des Lebesgue-Maßes lokal integrierbar. Weiterhin sei μ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, welches die Rolle der Startverteilung spielt. Aus Lemma 4.3.11 folgt zunächst $E_{\tilde{b}}^c =]G(-\infty), G(+\infty)[$. Mit anderen Worten, $\tilde{b}^{-2}$ ist bzgl. des Lebesgue-Maßes lokal integrierbar auf $]G(-\infty), G(+\infty)[$. Mit Theorem 5 in [17], welches auch für beliebige Startverteilungen gültig ist und dessen Beweis analog zu denen von Theorem 4 in [17] bzw. Theorem 2.2 in [18] verläuft, existiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit vollständiger Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ eine nichttriviale Lösung $(\mathbf{Y}, \mathbf{B})$ von (4.3.13) bzgl. $\mathbb{W}$ mit Startverteilung $\mu \circ G^{-1}$. Für diese Lösung kann wiederum ohne Einschränkung $Y_0 \in]G(-\infty), G(+\infty)[$, $S_\infty^{\mathbf{Y}} = +\infty$ und $\mathbf{Y}^\sigma = \mathbf{Y}$ angenommen werden, wobei $\sigma := \inf\{s \geq 0 : Y_s \notin]G(-\infty), G(+\infty)[$.

Entsprechend dem Beweis der Implikation (c)$\Rightarrow$(a) von Theorem 4.3.31 erhalten wir mit den dortigen Bezeichnungen, daß $(\tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{B}})$ eine nichttriviale Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbb{W}$ mit Startverteilung $\mu \circ G^{-1}$ ist. Für den Lösungsprozeß gilt dann ebenfalls $\tilde{\mathbf{Y}}^{\tilde{\sigma}} = \tilde{\mathbf{Y}}$. Über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}},\, \tilde{\mathbf{P}})$ ist dann nach Konstruktion auch $(\mathbf{X}, \mathbf{M}^*)$ mit $\mathbf{X} := \tilde{\mathbf{Y}} \circ \mathbf{A}$

eine Lösung von Gleichung (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$. Für den Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ gilt entsprechend $\tilde{\mathbf{P}}_{X_0} = \mu \circ G^{-1}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $S_\infty^{\mathbf{X}} = \infty$, $X_0 \in]G(-\infty), G(+\infty)[$ und $\mathbf{X}^\tau = \mathbf{X}$ mit τ aus (4.3.14).

Die Voraussetzung liefert nun $A_\infty = +\infty$ $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. und mit der $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. endlichen Rechtsinversen $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ von $\mathbf{A}$ ist dann mit (2.4.3)

$$\mathbf{X} \circ \mathbf{T} = \tilde{\mathbf{Y}}^{A_\infty} = \tilde{\mathbf{Y}} \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.} \tag{4.3.43}$$

Hieraus folgt dann aber, daß $\mathbf{X}$ nicht trivial ist. Denn ist $\mathbf{X}$ trivial, so folgt mit (4.3.43), daß auch $\tilde{\mathbf{Y}}$ trivial sein muß, was aber nicht sein kann. Unter Verwendung von Satz 4.3.16 (ii) erhalten wir mit der strengen Monotonie von H auf $]G(-\infty), G(+\infty)[$, daß auch $(\mathbf{X}^*, \mathbf{M}^*)$ mit $\mathbf{X}^* := (H(X_t))_{t\geq 0}$ eine nichttriviale Lösung von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung μ ist. □

Bemerkung 4.3.44 Man beachte, daß nach Theorem 4.3.31 die lokale Integrierbarkeit von b^{-2} die Existenz einer Lösung von Gleichung (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ für beliebige Startverteilungen garantiert. Dagegen muß für den Fall $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty < +\infty\}) > 0$ nicht notwendigerweise eine nichttriviale Lösung existieren. Beispielsweise sei hier auf den Fall $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty = 0\}) = 1$ verwiesen, der im Abschnitt 4.1 behandelt wurde. Darüber hinaus sind wir bei der Konstruktion einer Lösung von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ von einer Lösung $(\tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{B}})$ von (4.3.13) bzgl. des Wiener-Maßes $\mathbb{W}$ ausgegangen. Diese kann zwar nichttrivial sein, aber dennoch kann $\tilde{Y}_{t\wedge A_\infty} = \tilde{Y}_0$ für $t \geq 0$ $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. im Falle $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty < +\infty\}) > 0$ ausfallen, womit wegen (4.3.43) der zeittransformierte Prozeß $\mathbf{X} := \tilde{\mathbf{Y}} \circ \mathbf{A}$ trivial ist. Eine weitere Schwierigkeit ist auch, daß für die Lösung $(\tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{B}})$ von (4.3.1) bzgl. $\mathbb{W}$ im allgemeinen nicht notwendigerweise $\tilde{\mathbf{Y}}^{A_\infty} = \tilde{\mathbf{Y}}$ gelten muß (vgl. auch Satz 4.4.3 im nächsten Abschnitt).

Zum Abschluß wollen wir Kriterien angeben, unter denen eine Lösung von Gleichung (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ nicht explodiert. Für den Beweis wird im wesentlichen verwendet, daß die Lösung der Gleichung ohne Drift nicht explodiert (vgl. Satz 4.2.2).

Satz 4.3.45 *Für ein* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *sei* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *eine Lösung von Gleichung* (4.3.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$. *Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ *f. s. genau dann, wenn* $G(X_t) \in]G(-\infty), G(+\infty)[$ *für alle* $t \geq 0$ *f. s.*

(b) Falls $G(-\infty) = -\infty$ *und* $G(+\infty) = +\infty$ *gilt, dann ist* $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ *f. s.*

(c) Angenommen es gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} [\nu^+([0,n]) + \nu^-([-n,0])] < +\infty\,. \tag{4.3.46}$$

Dann ist $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ *f. s.*

Beweis: Zum Beweis dieses Satzes vergleiche man Proposition 4.34 in [20].

Die Aussage (a) dieser Behauptung ist trivial und folgt aus der Definition von $S_\infty^{\mathbf{X}}$ sowie der strengen Monotonie der Funktion G auf $\mathbb{R}$.

Die zweite Aussage ist eine Folgerung aus Satz 4.2.2. Da $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist, folgt aus Satz 4.3.16 (i), daß das Paar $(G \circ \mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Gemäß Satz 4.2.2 ist $G(X_t) \in \mathbb{R}$ für jedes $t \geq 0$ f. s. Aufgrund der strengen Monotonie von G auf $\mathbb{R}$ und wegen $G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ erhalten wir hieraus $X_t \in \mathbb{R}$ für $t \geq 0$ f. s. Also ist $S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty$ f. s.

Zum Beweis von (c) sei die Bedingung (4.3.46) erfüllt. Dann folgt aus (4.3.5), (4.3.6) bzw. (4.3.7) zusammen mit (4.3.8) unmittelbar $G(-\infty) = -\infty$ und $G(+\infty) = +\infty$, woraus mit (b) die Behauptung folgt. □

4.4 Die assoziierte Gleichung

Wir betrachten wiederum die stochastische Differentialgleichung (4.1.1). Zunächst wollen wir einen weiteren Lösungsbegriff einführen, nämlich den Begriff einer *Lösung der zu* (4.1.1) *assoziierten Gleichung.* Dieser hängt eng mit dem gewöhnlichen Lösungsbegriff zusammen, betrachtet aber hier als treibenden Prozeß die zu einem gegebenen stetigen lokalen Martingal assoziierte Brownsche Bewegung.

Definition 4.4.1 *Sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. *Das Paar* $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ *von stochastischen Prozessen definiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *mit Filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *in* $\mathcal{F}$ *heißt Lösung der zu* (4.1.1) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$, *falls gilt:*

(i) $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ *ist ein stetiges lokales* $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$*-Martingal mit* $\mathbf{P}_\mathbf{M} = \mathbf{Q}$ *auf* $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$.

(ii) $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ *ist ein stetiger* $\mathbb{F}_+^\mathbf{P} \circ \mathbf{T}$*-adaptierter stochastischer Prozeß mit* $Y_0 \in \mathbb{R}$ *und* $Y_{t\wedge S_\infty^\mathbf{Y}} = Y_t$ *für alle* $t \geq 0$.

(iii) $\mathbf{Y}$ *ist ein stetiges* $(\mathbb{F}_+^\mathbf{P} \circ \mathbf{T},\, \mathbf{P})$*-Semimartingal auf* $[\![0, S_\infty^\mathbf{Y}[\![$, *und es gilt*

$$(4.4.2)\qquad Y_t = Y_0 + \int_\mathbb{R} L^\mathbf{Y}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a) + \int_0^t b(Y_s)\,\mathrm{d}W_s \quad \textit{auf} \quad [\![0, S_\infty^\mathbf{Y}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Dabei ist $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ *die Rechtsinverse von* $\langle\mathbf{M}\rangle = (\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ *und* $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ *die zu* $\mathbf{M}$ *assoziierte* $(\mathbb{F}_+^\mathbf{P} \circ \mathbf{T},\, \mathbf{P})$*-Brownsche Bewegung. Den Prozeß* $\mathbf{Y}$ *selbst bezeichnen wir wieder als Lösungsprozeß der zu* (4.1.1) *assoziierten Gleichung und mit* $\mathbf{P}_{Y_0}$ *dessen Startverteilung. Gilt darüber hinaus*

$$\int_0^{D_{E_b}^\mathbf{Y} \wedge \langle M\rangle_\infty} \mathrm{I}_{N_b}(Y_s)\,\mathrm{d}s = 0 \quad \mathbf{P}\text{-f. s.},$$

so heißt das Paar $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ *Fundamentallösung der zu* (4.1.1) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$. *Eine Lösung* $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ *der zu* (4.1.1) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$ *heißt starke Lösung, falls* $\mathbf{Y}$ *an die Filtration* $\mathbb{F}^{(Y_0, M_0 + \mathbf{W}),\mathbf{P}}$ *adaptiert ist.*

Im folgenden wollen wir zeigen, daß der obige Begriff einer Lösung der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung im gewissen Sinne äquivalent zum Begriff einer Lösung von Gleichung (4.1.1) gemäß Definition 4.1.3 ist. Dazu werden wir zum einen zeigen, wie man eine Lösung der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung aus einer Lösung von Gleichung (4.1.1) gewinnen kann, womit dann Definition 4.4.1 auch gerechtfertigt ist. Des weiteren wollen wir umgekehrt zeigen, wie man eine Lösung von Gleichung (4.1.1) aus einer Lösung der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung erhält. Hierbei wird im wesentlichen die Technik der Zeittransformation verwandt.

Fangen wir mit dem Letzteren an. Dazu betrachten wir für ein $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ eine Lösung (bzw. Fundamentallösung) $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$, welche über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ definiert ist. Mit den Notationen aus Definition 4.4.1 besitzt der Lösungsprozeß $\mathbf{Y}$ folgendes Verhalten.

Satz 4.4.3 *Für den Lösungsprozeß* $\mathbf{Y}$ *der zu* (4.1.1) *assoziierten Gleichung gilt*

$$(4.4.4)\qquad \mathbf{Y}^{\langle M\rangle_\infty} = \mathbf{Y} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Beweis: Nach Definition gilt für den Prozeß $\mathbf{Y}$

(4.4.5) $$Y_t = Y_0 + \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{Y}}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a) + \int_0^t b(Y_s)\,\mathrm{d}W_s \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{Y}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Die zu $\mathbf{M}$ assoziierte Brownsche Bewegung $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ ist bekanntlich eine in $\langle M\rangle_\infty$ gestoppte $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung. Für den quadratischen Variationsprozeß $\langle \mathbf{Y}\rangle = (\langle Y\rangle_t)_{t\geq 0}$ von $\mathbf{Y}$ erhalten wir aus (4.4.5)

$$\langle Y\rangle_t = \int_0^{t\wedge\langle M\rangle_\infty} b^2(Y_s)\,\mathrm{d}s \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{Y}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Hieraus folgt aber unmittelbar

(4.4.6) $$\langle \mathbf{Y}\rangle^{\langle M\rangle_\infty} = \langle \mathbf{Y}\rangle \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{Y}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Für den Martingalanteil in (4.4.5) gilt dann mit Satz 2.2.4 (b)

$$\int_0^{t\wedge\langle M\rangle_\infty} b(Y_s)\,\mathrm{d}W_s = \int_0^t b(Y_s)\,\mathrm{d}W_s \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{Y}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Für die rechte (bzw. linke, symmetrische) lokale Zeit $L^{\mathbf{Y}}$ von $\mathbf{Y}$ erhalten wir aus (4.4.6) zusammen mit Bemerkung 2.3.17, Satz 2.3.9 (b) und der Stoppregel (2.3.4)

$$L^{\mathbf{Y}}(t\wedge\langle M\rangle_\infty, a) = L^{\mathbf{Y}}(t,a) \quad \text{für} \quad a\in\mathbb{R} \text{ und } t < S_\infty^{\mathbf{Y}} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Setzt man alles in (4.4.5) ein, so folgt schließlich

$$\mathbf{Y}^{\langle M\rangle_\infty} = \mathbf{Y} \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\mathbf{Y}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Nach Definition gilt $\mathbf{Y}^{S_\infty^{\mathbf{Y}}} = \mathbf{Y}$, woraus damit insgesamt die zu beweisende Behauptung des Satzes folgt. □

Aus diesem Satz erhalten wir unmittelbar die

Folgerung 4.4.7 *Für die Explosionszeit $S_\infty^{\mathbf{Y}}$ des Lösungsprozesses $\mathbf{Y}$ der zu* (4.1.1) *assoziierten Gleichung gilt*

$$S_\infty^{\mathbf{Y}} \leq \langle M\rangle_\infty \quad \textit{auf} \quad \{S_\infty^{\mathbf{Y}} < +\infty\} \cup \{\langle M\rangle_\infty = +\infty\} \quad \mathbf{P}\textit{-f. s.}$$

Als nächstes betrachten wir den zeittransformierten Prozeß $\mathbf{Y}\circ\langle\mathbf{M}\rangle$. Da $\langle\mathbf{M}\rangle$ eine endliche $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}}\circ\mathbf{T}$-Zeittransformation mit Trajektorien in E_+ ist, ist $\mathbf{Y}\circ\langle\mathbf{M}\rangle$ mit Satz 2.1.7 ein stetiger $\mathbb{G}\circ\langle\mathbf{M}\rangle$-adaptierter stochastischer Prozeß, wobei $\mathbb{G} := \mathbb{F}_+^{\mathbf{P}}\circ\mathbf{T}$. Für den Lösungsprozeß $\mathbf{Y}\circ\langle\mathbf{M}\rangle$ erhalten wir mit Lemma 4.3.29

(4.4.8) $$S_\infty^{\mathbf{Y}\circ\langle\mathbf{M}\rangle} = T_{S_\infty^{\mathbf{Y}}-} \quad \text{auf} \quad \Omega \quad \text{bzw.}$$

(4.4.9) $$D_{E_b}^{\mathbf{Y}\circ\langle\mathbf{M}\rangle} = T_{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}-} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Damit gilt folgender Satz für das Paar $(\mathbf{Y}\circ\langle\mathbf{M}\rangle, \mathbf{M})$.

Satz 4.4.10 *Es sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. *Ist* Y_0 *eine* $\mathcal{F}_0^{\mathbf{P}}$*-meßbare Zufallsgröße über* Ω, *dann ist* $(\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle, \mathbf{M})$ *eine Lösung (bzw. Fundamentallösung) von* (4.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$. *Insbesondere ist* $\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle$ *ein* $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$*-adaptierter stochastischer Prozeß.*

Beweis: Als erstes wollen wir zeigen, daß der Prozeß $\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle = (Y_{\langle M \rangle_t})_{t \geq 0}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$ adaptiert ist. Die Trajektorien des Lösungsprozesses $\mathbf{Y}$ sind nach Definition stetig und somit ist $\mathbf{Y}$ ein $\mathbb{G}$-vorhersagbarer stochastischer Prozeß. Da $\langle \mathbf{M} \rangle$ eine endliche $\mathbb{G}$-Zeittransformation mit Trajektorien in E_+ ist, ist der zeittransformierte Prozeß $\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle$ sogar ein $\mathbb{G} \circ \langle \mathbf{M} \rangle_- = (\mathcal{G}_{\langle M \rangle_t -})_{t \geq 0}$-adaptierter stochastischer Prozeß mit stetigen Trajektorien (vgl. Theorem IV.T20 in [7] bzw. den Beweis von Theorem IV.67 in [8]), wobei

$$\mathcal{G}_{\langle M \rangle_t -} := \sigma(\, \mathcal{G}_0 \cup \{ C \cap \{ \langle M \rangle_t > s \} \, : \, C \in \mathcal{G}_s, \, s \geq 0 \} \,) \quad (t \geq 0) \, . \tag{4.4.11}$$

Für $t \geq 0$ haben wir auf Ω folgende Zerlegung von $Y_{\langle M \rangle_t}$:

$$Y_{\langle M \rangle_t} = Y_0 \, \mathrm{I}_{\{\langle M \rangle_t = 0\}} + Y_{\langle M \rangle_t} \, \mathrm{I}_{\{\langle M \rangle_t > 0\}} \, . \tag{4.4.12}$$

Nach Voraussetzung ist Y_0 eine $\mathcal{F}_0^{\mathbf{P}}$-meßbare Zufallsgröße. Da $\langle \mathbf{M} \rangle$ an die Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$ adaptiert ist, ist der erste Summand in (4.4.12) eine $\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}}$-meßbare Zufallsgröße über Ω. Bleibt uns also zu zeigen, daß der zweite Summand in (4.4.12) ebenfalls $\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}}$-meßbar ist. Dazu betrachten wir folgende σ-Algebra $\mathcal{H}_t$ über Ω mit

$$\mathcal{H}_t := \{ \, C \in \mathcal{G}_{\langle M \rangle_t -} \, : \, C \cap \{ \langle M \rangle_t > 0 \} \in \mathcal{F}_t^{\mathbf{P}} \, \} \subseteq \mathcal{G}_{\langle M \rangle_t -} \quad (t \geq 0) \, .$$

Mit der für $s, t \geq 0$ gültigen Beziehung (2.4.4) kann man leicht zeigen, daß das Erzeugendensystem für die σ-Algebra $\mathcal{G}_{\langle M \rangle_t -}$ in $\mathcal{H}_t$ enthalten ist. Somit ist $\mathcal{H}_t = \mathcal{G}_{\langle M \rangle_t -}$ für jedes $t \geq 0$. Aus der $\mathcal{G}_{\langle M \rangle_t -}$-Meßbarkeit von $Y_{\langle M \rangle_t}$ folgt aber hieraus, daß der zweite Summand in (4.4.12) meßbar bzgl. $\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}}$ ist. Zusammenfassend haben wir damit die $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-Adaptiertheit des zeittransformierten Prozesses $\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle$ gezeigt.

Als nächstes zeigen wir, daß das Paar $(\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle, \mathbf{M})$ von $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-adaptierten stochastischen Prozessen eine Lösung von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Zunächst gilt $Y_{\langle M \rangle_0} = Y_0 \in \mathbb{R}$ und $(\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle)^{S_\infty^{\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle}} = \mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle$, wobei Letzteres aus (4.4.8) wegen $\mathbf{Y}^{S_\infty^{\mathbf{Y}}} = \mathbf{Y}$ auf Ω folgt. Um zu zeigen, daß $(\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist, genügt es mit Folgerung 4.3.26 zu zeigen, daß $(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{M})$ mit $\tilde{\mathbf{Y}} := (G(Y_{\langle M \rangle_t}))_{t \geq 0}$ eine Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Nach Definition ist $\mathbf{M}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal mit $\mathbf{P}_{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Weiterhin ist nach Voraussetzung $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ eine Lösung der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$. Aus Satz 4.3.16 (i) folgt dann aber, daß auch $(\bar{\mathbf{Y}}, \mathbf{M})$ mit $\bar{\mathbf{Y}} := (G(Y_t))_{t \geq 0}$ eine Lösung der zu (4.3.13) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Also ist nach Definition $\bar{\mathbf{Y}}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{G}, \mathbf{P})$-Martingal auf $[\![0, S_\infty^{\bar{\mathbf{Y}}}[\![$ und es gilt

$$\bar{Y}_t = \bar{Y}_0 + \int_0^t \tilde{b}(\bar{Y}_s) \, \mathrm{d}W_s \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\bar{\mathbf{Y}}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.4.13}$$

Mit Satz 4.2.2 haben wir weiterhin $S_\infty^{\bar{\mathbf{Y}}} = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. Somit ist $\bar{\mathbf{Y}}$ ununterscheidbar von einem stetigen lokalen $(\mathbb{G}, \mathbf{P})$-Martingal (vgl. die Ausführungen im Anschluß von Satz 4.2.2). Nun ist $\tilde{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{Y}} \circ \langle \mathbf{M} \rangle$. Da $\bar{Y}_0$ eine $\mathcal{F}_0^{\mathbf{P}}$-meßbare Zufallsgröße ist, ist mit Satz 2.4.8 (a) und den vorhergehenden Überlegungen der $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-adaptierte stochastische Prozeß $\tilde{\mathbf{Y}}$ ununterscheidbar von einem stetigen lokalen $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Damit ist aber $\tilde{\mathbf{Y}}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal auf $[\![0, S_\infty^{\tilde{\mathbf{Y}}}[\![$, wobei $S_\infty^{\tilde{\mathbf{Y}}} = S_\infty^{\bar{\mathbf{Y}}} = +\infty$ **P**-f. s. gilt. Führt man in (4.4.13) mittels $\langle \mathbf{M} \rangle$ eine Zeittransformation durch, so erhalten wir aus Satz 2.4.8 (b) und (2.2.10) sowie unter Beachtung von $S_\infty^{\tilde{\mathbf{Y}}} = S_\infty^{\bar{\mathbf{Y}}} = +\infty$ **P**-f. s. schließlich

$$\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_0 + \int_0^t \tilde{b}(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}M_s \quad \text{auf} \quad [\![0, S_\infty^{\tilde{\mathbf{Y}}}[\![\quad \mathbf{P}\text{-f. s.},$$

wobei $\mathbf{M} = M_0 + \mathbf{W} \circ \langle \mathbf{M} \rangle$ **P**-f. s. gilt. Hieraus folgt dann, daß das Paar $(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Wegen $\tilde{\mathbf{Y}} = (G(Y_{\langle M \rangle_t}))_{t \geq 0}$ haben wir unter Verwendung von Folgerung 4.3.26 somit gezeigt, daß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$ das Paar $(\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.3.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist.

Ist zusätzlich $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ eine Fundamentallösung der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$, so ist auch $(\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle, \mathbf{M})$ eine Fundamentallösung von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$. Dies folgt aus der Beziehung (vgl. Satz 2.4.6)

$$\int_0^{D_{E_b}^{\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle}} \mathrm{I}_{N_b}(Y_{\langle M \rangle_s})\,\mathrm{d}\langle M \rangle_s = \int_0^{\langle M \rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle}}} \mathrm{I}_{N_b}(Y_s)\,\mathrm{d}s \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

und da $\langle M \rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle}} \leq D_{E_b}^{\mathbf{Y}}$ **P**-f. s. wegen (4.4.9) gilt. □

Bemerkung 4.4.14 Ist mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 4.4.10 die Zufallsgröße Y_0 nicht $\mathcal{F}_0^{\mathbf{P}}$-meßbar, so kann man im allgemeinen nicht erwarten, daß $\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle$ an die Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-adaptiert ist. Zwar bleibt der zweite Summand in (4.4.12) $\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}}$-meßbar für $t \geq 0$, dagegen ist der erste Summand in (4.4.12) meßbar bzgl. der σ-Algebra $\mathcal{G}_0$. Somit wäre die Aussage von Satz 4.4.10 dahingehend zu modifizieren, daß $(\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist, welche über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$ definiert ist, wobei $\mathcal{H}_t := \mathcal{G}_0 \vee \mathcal{F}_t^{\mathbf{P}}$ für $t \geq 0$. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß Y_0 eine $\mathcal{F}_0^{\mathbf{P}}$-meßbare Zufallsgröße ist, ist die Inklusion $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{F}_0^{\mathbf{P}}$. Diese Bedingung ist wegen

$$\mathcal{G}_0 = \{A \in \mathcal{F} \,:\, A \cap \{T_0 \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}^{\mathbf{P}} \text{ für alle } t \geq 0\}$$

losgelöst vom Lösungsprozeß und stellt damit eine Forderung an den treibenden Prozeß dar.

Folgerung 4.4.15 *Sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. *Ist* $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ *eine starke Lösung der zu* (4.1.1) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$, *so ist auch* $(\mathbf{Y} \circ \langle \mathbf{M} \rangle, \mathbf{M})$ *eine starke Lösung von Gleichung* (4.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$.

Beweis: Der Beweis verläuft ganz analog dem Beweis von Satz 4.4.10. Dabei hat man zum einen zu beachten, daß die $\mathbb{F}_+^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Zeittransformation $\mathbf{T}$ ebenfalls eine $\mathbb{F}_+^{(Y_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$-Zeittransformation ist, da $\mathcal{F}_{t+}^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}_{t+}^{(Y_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$ für jedes $t \geq 0$ gilt. Somit ist der Prozeß $M_0 + \mathbf{W}$ an die Filtration $\mathbb{F}_+^{(Y_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$ adaptiert. Zum anderen ist Y_0 eine $\mathcal{F}_0^{(Y_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$-meßbare Zufallsgröße. Da nun laut Voraussetzung $\mathbf{Y}$ ein $\mathbb{F}^{(Y_0,M_0+\mathbf{W}),\mathbf{P}}$-adaptierter Prozeß ist, erhalten wir hieraus insgesamt, daß $\mathbf{Y}$ an die Filtration $\mathbb{F}_+^{(Y_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$ adaptiert ist. Damit ist die Voraussetzung von Satz 4.4.10 erfüllt, woraus unmittelbar die Behauptung folgt. □

Als nächstes wollen wir zeigen, wie man eine Lösung der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung aus einer Lösung von Gleichung (4.1.1) mittels Zeittransformation gewinnt, womit dann auch Definition 4.4.1 gerechtfertigt ist. Dazu betrachten wir ein $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. Weiterhin sei über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ eine Lösung $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ von **(4.1.1)** bzgl. $\mathbf{Q}$ gegeben. Wiederum bezeichnen $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ die Rechtsinverse von $\langle \mathbf{M} \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t\geq 0}$ und $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ die zu $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ assoziierte $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung. Des weiteren ist der stochastische Prozeß $\mathbf{X} \circ \mathbf{T} = (X_{T_t})_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ zwar wohldefiniert und $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$-adaptiert, aber die Trajektorien dieses Prozesses sind nur $\mathbf{P}$-f. s. stetig (vgl. den nachfolgenden Satz), womit die Stetigkeitsbedingung in Definition 4.4.1 (ii) nicht erfüllt ist. Ziel ist es zu zeigen, daß das Paar $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ für einen von $\mathbf{X} \circ \mathbf{T}$ ununterscheidbaren $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$-adaptierten stochastischen Prozeß $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ mit stetigen Trajektorien eine Lösung der zu **(4.1.1)** assoziierten Gleichung ist. Zuvor sollen einige wichtige Eigenschaften bewiesen werden, die sich auf das Verhalten der Trajektorien des Lösungsprozesses $\mathbf{X}$ beziehen (vgl. auch Satz 4.2.6, Satz 4.3.27 und Satz 4.3.45).

Satz 4.4.16 *Für die Trajektorien des Lösungsprozesses* $\mathbf{X}$ *gilt:*

(a) $\mathbf{X}$ *ist* $\mathbf{T}$*-adaptiert* $\mathbf{P}$*-f. s.*

(b) Der (eigentliche oder uneigentliche) Grenzwert $X_\infty := \lim_{t\to+\infty} X_t$ *existiert in* $\overline{\mathbb{R}}$ *auf* $\{\langle M \rangle_\infty < +\infty\}$ $\mathbf{P}$*-f. s. (vgl. Satz 4.2.6).*

Beweis: Für den Beweis von (a) ist zu zeigen, daß für $\mathbf{P}$-f. a. $\omega \in \Omega$ die Trajektorie $\mathbf{X}(\omega)$ auf allen Intervallen $[T_{t-}(\omega), T_t(\omega)] \cap \mathbb{R}_+$ für $t \geq 0$ konstant ist, wobei $T_{0-} := 0$. Unter Beachtung von **(2.4.5)** genügt es zu zeigen, daß für $\mathbf{P}$-f. a. $\omega \in \Omega$ und beliebige nichtleere Intervalle $[u, v] \subseteq \mathbb{R}_+$ aus $\langle M \rangle_u(\omega) = \langle M \rangle_v(\omega)$ folgt

$$X_u(\omega) = X_s(\omega) \quad \text{für alle} \quad s \in [u, v] .$$

Nach Satz 4.3.16 (i) ist $(\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{M})$ mit $\tilde{\mathbf{X}} := (G(X_t))_{t\geq 0}$ eine Lösung von **(4.3.13)** bzgl. $\mathbf{Q}$. Dabei können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $\tilde{\mathbf{X}}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Anderenfalls kann man sich ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal besorgen, welches ununterscheidbar von $\tilde{\mathbf{X}}$ ist (vgl. Satz 4.2.2). Für $\tilde{\mathbf{X}}$ gilt dann insbesondere

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 + \int_0^t \tilde{b}(\tilde{X}_s) \mathrm{d}M_s , \quad t \geq 0 , \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

und wir erhalten für den quadratischen Variationsprozeß von $\tilde{\mathbf{X}}$ die Darstellung

$$\langle \tilde{X} \rangle_t = \int_0^t \tilde{b}^2(\tilde{X}_s)\, \mathrm{d}\langle M \rangle_s , \quad t \geq 0 , \quad \mathbf{P}\text{-f. s}$$

Mit Satz 2.2.4 (b) folgt dann aber hieraus, daß die Konstantheitsintervalle von $\mathbf{M}$ die Konstantheitsintervalle von $\tilde{\mathbf{X}}$ sind. Somit gibt es eine $\mathbf{P}$-Nullmenge $N \in \mathcal{F}$, so daß für $\omega \in N^c$ und beliebige nichtleere Intervalle $[u, v] \subseteq \mathbb{R}_+$ aus $\langle M \rangle_u(\omega) = \langle M \rangle_v(\omega)$ folgt

$$\tilde{X}_u(\omega) = \tilde{X}_s(\omega) \quad \text{für alle} \quad s \in [u, v] . \tag{4.4.17}$$

Wegen $\tilde{X}_t = G(X_t)$ für $t \geq 0$ erhalten wir aber hieraus, daß auch **(4.4.17)** für $\mathbf{X}$ anstelle von $\tilde{\mathbf{X}}$ gilt. Denn ist $\tilde{X}_u(\omega) \in]G(-\infty), G(+\infty)[$, so folgt aus **(4.4.17)** wegen der strengen Monotonie von G unmittelbar $X_u(\omega) = X_s(\omega)$ für $s \in [u, v]$. Ist andererseits $\tilde{X}_u(\omega) \in \{G(-\infty), G(+\infty)\}$ so ist $u \geq S_\infty^{\mathbf{X}}(\omega)$, woraus aber nach Definition einer Lösung $X_u(\omega) = X_{S_\infty^{\mathbf{X}}}(\omega) = X_s(\omega)$ für $s \in [u, v]$ folgt. Also gilt auch **(4.4.17)** für $\mathbf{X}$. Mit anderen Worten, $\mathbf{X}$ ist $\mathbf{T}$-adaptiert $\mathbf{P}$-f. s., womit wir (a) bewiesen haben.

Als nächtes wollen wir Aussage (b) beweisen. Zunächst ist klar, daß gemäß Definition 4.1.3 (i) der Grenzwert X_∞ auf der Menge $\{S_\infty^{\mathbf{X}} < +\infty\}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert. Bleibt uns also noch die Existenz des Grenzwertes X_∞ auf der Menge $\{S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty\} \cap \{\langle M\rangle_\infty < +\infty\}$ $\mathbf{P}$-f. s. zu zeigen. Dazu betrachten wir den transformierten Prozeß $\tilde{\mathbf{X}} := (G(X_t))_{t\geq 0}$. Nach Satz 4.3.16 (i) ist das Paar $(\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{M})$ eine Lösung von **(4.3.13)** bzgl. $\mathbf{Q}$, woraus mit Satz 4.2.6 folgt, daß $\mathbf{P}$-f. s. der Grenzwert $\tilde{X}_\infty := \lim_{t\to+\infty} \tilde{X}_t$ auf $\{\langle M\rangle_\infty < +\infty\}$ existiert und endlich ist. Auf $\{S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty\}$ ist nun $\tilde{X}_t \in]G(-\infty), G(+\infty)[$ für $t \geq 0$. Wegen der Stetigkeit der Trajektorien von $\tilde{\mathbf{X}}$ ist

$$\tilde{X}_\infty \in [G(-\infty), G(+\infty)] \quad \text{auf} \quad \{S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty\} \cap \{\langle M\rangle_\infty < +\infty\} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Nach Konstruktion ist die Umkehrfunktion H von G auf $]G(-\infty), G(+\infty)[$ stetig und nimmt Werte in $\mathbb{R}$ an. Darüber hinaus ist H auf $[G(-\infty), G(+\infty)]$ monoton wachsend, woraus die Existenz der einseitigen Grenzwerte von H in jedem Punkt des Intervalls $[G(-\infty), G(+\infty)]$ folgt. Somit existiert in $\overline{\mathbb{R}}$ der (endliche oder uneigentliche) Grenzwert

$$X_\infty = \lim_{t\to+\infty} H(\tilde{X}_t) \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{auf} \quad \{S_\infty^{\mathbf{X}} = +\infty\} \cap \{\langle M\rangle_\infty < +\infty\} \ \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Zusammenfassend erhalten wir hieraus schließlich Behauptung (b). □

Bemerkung 4.4.18 Wie der Beweis von Satz 4.4.16 (a) zeigt, explodiert der Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ entweder vor Eintritt in ein Konstantheitsintervall von $\mathbf{M}$ oder erst danach. Im Detail heißt dies, es existiert eine $\mathbf{P}$-Nullmenge $N \in \mathcal{F}$, so daß für alle $\omega \in N^c \cap \{S_\infty^{\mathbf{X}} < +\infty\}$ und beliebige nichtleere Intervalle $[u, v] \subseteq \mathbb{R}_+$ aus $\langle M\rangle_u(\omega) = \langle M\rangle_v(\omega)$ entweder $v < S_\infty^{\mathbf{X}}(\omega)$ oder $u \geq S_\infty^{\mathbf{X}}(\omega)$ folgt. Ist nämlich $u < S_\infty^{\mathbf{X}}(\omega) \leq v$, so ist die Trajektorie $\mathbf{X}(\omega)$ nach Definition der Explosion von Lösungen (vgl. Definition 4.1.3 **1.** (i)) auf jeder lokalen Umgebung $]S_\infty^{\mathbf{X}}(\omega) - \varepsilon, S_\infty^{\mathbf{X}}(\omega)]$ mit $\varepsilon > 0$ nicht konstant. Dies bedeutet, daß dann $\langle M\rangle_u(\omega) \neq \langle M\rangle_v(\omega)$ gelten muß. Also ist $[u, v]$ in diesem Fall kein Konstantheitsintervall von $\mathbf{M}$.

Der vorhergehende Satz liefert also die Existenz eines vom Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ ununterscheidbaren $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$-adaptierten stochastischen Prozesses $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{X}_t)_{t\geq 0}$ mit stetigen Trajektorien, so daß für $\omega \in \Omega$ die Trajektorie $\hat{\mathbf{X}}(\omega)$ auf allen Intervallen $[T_{t-}(\omega), T_t(\omega)] \cap \mathbb{R}_+$ mit $t \geq 0$ konstant ist und für $\omega \in \{\langle M\rangle_\infty < +\infty\}$ der Grenzwert $\hat{X}_\infty(\omega)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert. Im Falle einer Gleichung ohne Drift kann $\hat{\mathbf{X}}$ sogar so gewählt werden, daß der Grenzwert $\hat{X}_\infty$ auf der Menge $\{\langle M\rangle_\infty < +\infty\}$ endlich ist (vgl. den Beweis von Satz 4.2.2 zur Definition eines Prozesses $\hat{\mathbf{X}}$ mit diesen Eigenschaften). Insbesondere ist $(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{M})$ eine Lösung von **(4.1.1)** bzgl. $\mathbf{Q}$, was sich unmittelbar aus der Lösung $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ ergibt. Damit ist unter Beachtung von $\{\langle M\rangle_\infty < +\infty\} = \bigcup_{t\geq 0}\{T_t = +\infty\}$ der zeittransformierte stochastische Prozeß $\hat{\mathbf{X}} \circ \mathbf{T} = (\hat{X}_{T_t})_{t\geq 0}$ wohldefiniert, und dieser ist ein $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$-adaptierter stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit stetigen Trajektorien. Insbesondere ist $\hat{\mathbf{X}} \circ \mathbf{T}$ ununterscheidbar von $\mathbf{X} \circ \mathbf{T}$.

Wie in den Ausführungen im Anschluß von Bemerkung 4.2.5 wollen wir für den Rest dieses Abschnitts vereinbaren, daß wir den Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ von Gleichung **(4.1.1)** stets mit dem Prozeß $\hat{\mathbf{X}}$ identifizieren. Entsprechendes gilt auch, wenn wir Gleichungen ohne Drift betrachten. Für die Eintrittszeit des zeittransformierten Prozesses $\mathbf{X} \circ \mathbf{T}$ in die Menge E_b bzw. für dessen Explosionszeit $S_\infty^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}}$ haben wir dann folgende Beziehungen, die sich unmittelbar aus dem nachfolgenden Satz ergeben:

$$D_{E_b}^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}} \wedge \langle M\rangle_\infty = \langle M\rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

bzw.

$$S_\infty^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}} \wedge \langle M\rangle_\infty = \langle M\rangle_{S_\infty^{\mathbf{X}}} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Satz 4.4.19 *Sei $B \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ eine abgeschlossene Menge. Dann gilt für den Lösungsprozeß $\mathbf{X}$*

$$\tau_B^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}} \wedge \langle M\rangle_\infty = \langle M\rangle_{\tau_B^{\mathbf{X}}} \quad \mathbf{P}\text{-}f.\ s. \tag{4.4.20}$$

Insbesondere ist

$$\tau_B^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}} = \langle M\rangle_{\tau_B^{\mathbf{X}}} \quad auf \quad \{\tau_B^{\mathbf{X}} < +\infty\} \cup \{\langle M\rangle_\infty = +\infty\} \quad \mathbf{P}\text{-}f.\ s. \tag{4.4.21}$$

Für den von $\mathbf{X}$ ununterscheidbaren Prozeß $\hat{\mathbf{X}}$ kann der Zusatz $\mathbf{P}$-f. s. in (4.4.20) *und* (4.4.21) *weggelassen werden.*

Beweis: Wie wir oben ausgeführt haben, wollen wir $\mathbf{X}$ mit dem Prozeß $\hat{\mathbf{X}}$ identifizieren. Unter Verwendung von (2.4.4) gilt auf Ω zunächst $X_{T_t} \notin B$ für $t < \langle M\rangle_{\tau_B^{\mathbf{X}}}$. Somit ist

$$\tau_B^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}} \geq \langle M\rangle_{\tau_B^{\mathbf{X}}} \quad \text{auf} \quad \Omega\,. \tag{4.4.22}$$

Für den Fall $\omega \in \{\tau_B^{\mathbf{X}} < +\infty\}$ folgt aus der Stetigkeit von $\mathbf{X}(\omega)$ sowie der Abgeschlossenheit von B zusammen mit Satz 4.4.16 (a)

$$X_{T_{\langle M\rangle_{\tau_B^{\mathbf{X}}}}}(\omega) = X_{\tau_B^{\mathbf{X}}}(\omega) \in B\,.$$

Also gilt $\tau_B^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}} \leq \langle M\rangle_{\tau_B^{\mathbf{X}}}$ auf $\{\tau_B^{\mathbf{X}} < +\infty\}$, und mit (4.4.22) ist

$$\tau_B^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}} = \langle M\rangle_{\tau_B^{\mathbf{X}}} \quad \text{auf} \quad \{\tau_B^{\mathbf{X}} < +\infty\}\,. \tag{4.4.23}$$

Bleibt uns also noch zu untersuchen, was auf der Menge $\{\tau_B^{\mathbf{X}} = +\infty\}$ passiert. Zunächst sieht man unmittelbar, daß gilt

$$\tau_B^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}} = \langle M\rangle_{\tau_B^{\mathbf{X}}} \quad \text{auf} \quad \{\langle M\rangle_\infty = +\infty\} \cap \{\tau_B^{\mathbf{X}} = +\infty\}\,. \tag{4.4.24}$$

Gemäß Satz 4.4.16 (b) existiert auf $\{\langle M\rangle_\infty < +\infty\}$ der Grenzwert X_∞ in $\overline{\mathbb{R}}$. Wegen $X_t \notin B$ für alle $t \geq 0$ auf $\{\tau_B^{\mathbf{X}} = +\infty\}$ sind auf der Menge $\{\langle M\rangle_\infty < +\infty\} \cap \{\tau_B^{\mathbf{X}} = +\infty\}$ die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:

1. Gilt $X_\infty \notin B$, dann ist $X_{T_t} \notin B$ für $t \geq 0$, und es ist $\tau_B^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}} = +\infty$.
2. Gilt $X_\infty \in B$, dann ist $X_{T_t} \in B$ für $t \geq \langle M\rangle_\infty$, und wir haben $\tau_B^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}} \leq \langle M\rangle_{\tau_B^{\mathbf{X}}}$.

Insgesamt erhalten wir hieraus und aus (4.4.24) unter Beachtung von (4.4.22)

$$\tau_B^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}} \wedge \langle M\rangle_\infty = \langle M\rangle_{\tau_B^{\mathbf{X}}} \quad \text{auf} \quad \{\tau_B^{\mathbf{X}} = +\infty\}\,.$$

Zusammen mit (4.4.23) haben wir somit die Richtigkeit von (4.4.20) sowie (4.4.21) gezeigt. □

Nun wollen wir zeigen, wie Lösungen von (4.1.1) mit Lösungen der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung zusammenhängen.

Satz 4.4.25 *Es sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. *Ist im Sinne unserer Vereinbarung* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *eine Lösung (bzw. Fundamentallösung) von* (4.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$, *dann ist das Paar* $(\mathbf{X} \circ \mathbf{T}, \mathbf{M})$ *eine Lösung (bzw. Fundamentallösung) der zu* (4.1.1) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$.

Beweis: Sei $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$, welche über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ in $\mathcal{F}$ definiert ist. Wie vereinbart identifizieren wir den Prozeß $\mathbf{X}$ mit $\hat{\mathbf{X}}$. Für den zeittransformierten Prozeß $\mathbf{Y} := \mathbf{X} \circ \mathbf{T}$ gilt zunächst $Y_0 \in \mathbb{R}$, was aus der $\mathbf{T}$-Adaptiertheit von $\mathbf{X}$ folgt. Darüber hinaus ist $\mathbf{Y}$ ein stetiger $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$-adaptierter stochastischer Prozeß, für den $\mathbf{Y}^{\langle M \rangle_\infty} = \mathbf{Y}$ gilt. Mit Satz 4.4.19 folgt dann hieraus $\mathbf{Y}^{S_\infty^{\mathbf{Y}}} = \mathbf{Y}$, wenn man $\mathbf{X}^{S_\infty^{\mathbf{X}}} = \mathbf{X}$ berücksichtigt. Ziel ist es nun zu zeigen, daß $(G \circ \mathbf{Y}, \mathbf{M})$ mit $G \circ \mathbf{Y} := (G(Y_t))_{t \geq 0}$ eine Lösung der zu (4.3.13) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Eine Anwendung von Folgerung 4.3.26 liefert dann die zu beweisende Behauptung.

Nach Satz 4.3.16 (i) ist das Paar $(\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{M})$ mit $\tilde{\mathbf{X}} := (G(X_t))_{t \geq 0}$ eine Lösung von (4.3.13) bzgl. $\mathbf{Q}$. Insbesondere gilt

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 + \int_0^t \tilde{b}(\tilde{X}_s)\,\mathrm{d}M_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}\,, \tag{4.4.26}$$

wenn man $S_\infty^{\tilde{\mathbf{X}}} = +\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. beachtet, wobei $\tilde{b}$ gemäß Lemma 4.3.11 definiert ist. Wir betrachten den zeittransformierten Prozeß $\tilde{\mathbf{Y}} := \tilde{\mathbf{X}} \circ \mathbf{T} = (G(Y_t))_{t \geq 0}$. Nach Konstruktion ist $\tilde{\mathbf{Y}}$ ein stetiger $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$-adaptierter stochastischer Prozeß mit $\tilde{Y}_0 \in\,]G(-\infty), G(+\infty)[$. Darüber hinaus ist $\mathbf{M}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal mit $\mathbf{P}_{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$.

Um nun die Behauptung des Satzes zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß das Paar $(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{M})$ eine Lösung der zu (4.3.13) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Dazu betrachten wir den Prozeß $(\tilde{b}(\tilde{Y}_t))_{t \geq 0}$ und wollen zeigen, daß dieser zur Menge $\mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T})$ gehört. Mit Satz 2.4.6 folgt aus (4.4.26) zunächst die Beziehung

$$\langle \tilde{X} \rangle_{T_t} = \int_0^{T_t} \tilde{b}^2(\tilde{X}_s)\,\mathrm{d}\langle M \rangle_s = \int_0^{t \wedge \langle M \rangle_\infty} \tilde{b}^2(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \tilde{b}^2(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}\langle W \rangle_s\,,\ t \geq 0\,,\ \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Hieraus erhalten wir unmittelbar, daß $\mathbf{P}$-f. s. auf der Menge $\{\langle M \rangle_\infty = +\infty\}$ gilt

$$\int_0^t \tilde{b}^2(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}\langle W \rangle_s = \langle \tilde{X} \rangle_{T_t} < +\infty \quad \text{für} \quad t \geq 0\,.$$

Darüber hinaus wissen wir, daß $\langle \tilde{X} \rangle_\infty < +\infty$ auf der Menge $\{\langle M \rangle_\infty < +\infty\}$ $\mathbf{P}$-f. s. ist (vgl. Satz 4.2.6 zusammen mit Satz 2.2.4 (c) und (d)). Somit gilt

$$\int_0^t \tilde{b}^2(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}\langle W \rangle_s \leq \langle \tilde{X} \rangle_\infty < +\infty \quad \text{für} \quad t \geq 0$$

auf $\{\langle M \rangle_\infty < +\infty\}$ $\mathbf{P}$-f. s. Mit dem Vorhergehenden erhalten wir schließlich insgesamt

$$\int_0^t \tilde{b}^2(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}\langle W \rangle_s < +\infty\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Also ist $(\tilde{b}(\tilde{Y}_t))_{t\geq 0} \in \mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T})$. Damit ist das stochastische Integral

$$\left(\int_0^t \tilde{b}(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}W_s\right)_{t\geq 0} \tag{4.4.27}$$

wohldefiniert und ist ein stetiges lokales $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T},\, \mathbf{P})$-Martingal. Nach Satz 3.1.22 bzw. mit (3.1.24) folgt nun aus (4.4.26) und der $\mathbf{T}$-Stetigkeit von $\tilde{\mathbf{X}}$ die Beziehung

$$\tilde{Y}_t = \tilde{X}_{T_t} = \tilde{Y}_0 + \int_0^t \tilde{b}(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}W_s \quad \text{auf} \quad [\![0, \langle M\rangle_\infty\|\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Wegen der Stetigkeit der Trajektorien des Prozesses $\tilde{\mathbf{Y}}$ und der Stetigkeit des stochastischen Integrals (4.4.27) erhalten wir hieraus und unter Verwendung von $\tilde{\mathbf{Y}}^{\langle M\rangle_\infty} = \tilde{\mathbf{Y}}$ somit

$$\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_0 + \int_0^{t\wedge\langle M\rangle_\infty} \tilde{b}(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}W_s\,, \quad t\geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Schließlich folgt mit der Stoppregel (2.3.4) und der Eigenschaft, daß $\mathbf{W}$ eine in $\langle M\rangle_\infty$ gestoppte Brownsche Bewegung ist,

$$\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_0 + \int_0^t \tilde{b}(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}W_s\,, \quad t\geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{4.4.28}$$

Hieraus folgt nun insgesamt, daß $\tilde{\mathbf{Y}}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{T},\, \mathbf{P})$-Martingal auf $[\![0, S_\infty^{\tilde{\mathbf{Y}}}[\![$ ist, für welches (4.4.28) gilt. Damit ist aber $(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{M})$ bzw. $(G\circ \mathbf{Y}, \mathbf{M})$ eine Lösung der zu (4.3.13) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ mit $\tilde{Y}_0 \in]G(-\infty), G(+\infty)[$. Dies war aber gerade zu zeigen.

Ist $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Fundamentallösung von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$, so ist auch $(\mathbf{X}\circ\mathbf{T}, \mathbf{M})$ eine Fundamentallösung der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$. Dies folgt unmittelbar aus Satz 4.4.19 zusammen mit der Stoppregel (2.3.4) und Satz 2.4.6, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbf{P}}\Big(\int_0^{D_{E_b}^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}}} \mathrm{I}_{N_b}(X_{T_s})\,\mathrm{d}\langle W\rangle_s\Big) &= \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\Big(\int_0^{\langle M\rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}}} \mathrm{I}_{N_b}(X_{T_s})\,\mathrm{d}s\Big)\\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\Big(\int_0^{D_{E_b}^{\mathbf{X}}} \mathrm{I}_{N_b}(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\Big) = 0\,.
\end{aligned}$$

□

Damit haben wir gezeigt, wie man aus einer Lösung von Gleichung (4.1.1) eine Lösung der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung bekommt. Bleibt noch die Frage zu klären, wie es sich bei starken Lösungen verhält. Angenommen $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ ist eine starke Lösung von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$. Dann ist nach Definition der Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$ adaptiert. Nach Satz 4.4.25 ist der zeittransformierte Prozeß $\mathbf{X}\circ\mathbf{T}$ zusammen mit $\mathbf{M}$ eine Lösung der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung, welche $\mathbb{F}_+^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$-adaptiert ist. Nun ist der Prozeß $M_0 + \mathbf{W}$ an die Filtration $\mathbb{F}_+^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$ adaptiert, welche im allgemeinen größer ausfällt als die Filtration $\mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}}$. Dies bedeutet aber, daß der Lösungsprozeß $\mathbf{X} \circ \mathbf{T}$ im allgemeinen nicht $\mathbb{F}^{(X_0,M_0+\mathbf{W}),\mathbf{P}}$-adaptiert zu sein braucht und somit zusammen mit $\mathbf{M}$ keine starke Lösung der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung bildet. Damit dennoch $(\mathbf{X} \circ \mathbf{T}, \mathbf{M})$ eine starke Lösung der zu (4.1.1) assoziierten Gleichung ist, müssen zusätzliche Bedingungen an den treibenden Prozeß $\mathbf{M}$ gestellt werden, welche die Gleichheit der beiden Filtrationen $\mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}}$ und $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$ zur Folge hat. Die Gleichheit der beiden Filtrationen ist beispielsweise dann erfüllt, wenn das stetige lokale Martingal $\mathbf{M}$ pur ist. Im Falle eines puren stetigen lokalen Martingals $\mathbf{M}$ folgt nämlich mit Proposition 1 in [14], Proposition 7 und Proposition 8 in [15] sowie Satz 3.3.4

$$\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \circ \mathbf{T} = \mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}} .$$

Als Folgerung zu Satz 4.4.25 erhalten wir hiermit für zeittransformierte starke Lösungen die Aussage:

Folgerung 4.4.29 *Seien* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^p_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *und* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *eine starke Lösung von* (4.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *(im Sinne unserer Vereinbarung). Dann ist* $(\mathbf{X} \circ \mathbf{T}, \mathbf{M})$ *eine starke Lösung der zu* (4.1.1) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$.

Beweis: Wir betrachten über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ die starke Lösung $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$. Nach Definition ist $\mathbf{X}$ ein $\mathbb{F}^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$-adaptierter stochastischer Prozeß mit stetigen Trajektorien. Somit ist $\mathbf{X}$ ein $\mathbb{F}^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$-vorhersagbarer Prozeß. Hieraus folgt aber, daß der zeittransformierte Prozeß $\mathbf{X} \circ \mathbf{T}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}_- := (\mathcal{F}_{T_t-}^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}})_{t \geq 0}$ adaptiert ist, wobei

$$\mathcal{F}_{T_t-}^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}} := \sigma(\mathcal{F}_0^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}} \cup \{A \cap \{T_t > s\} \,:\, A \in \mathcal{F}_s^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}},\, s \geq 0\}) \tag{4.4.30}$$

für $t \geq 0$ (vgl. Theorem IV.T20 und Theorem IV.T21 in [7] bzw. Theorem IV.67 in [8]).

Es ist nun zu zeigen, daß $\mathcal{F}_{T_t-}^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t^{(X_0,M_0+\mathbf{W}),\mathbf{P}}$ für $t \geq 0$ gilt, woraus wir dann mit Satz 4.4.25 die Behauptung der Folgerung erhalten. Um dies einzusehen, genügt es zu zeigen, daß für jedes $t \geq 0$ der Erzeuger für die σ-Algebra aus (4.4.30) in der σ-Algebra $\mathcal{G}_t$ enthalten ist.

Zunächst ist klar, daß $\mathcal{F}_0^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}} = \sigma(X_0, M_0) \vee \mathcal{N}^{\mathbf{P}}$ wegen $W_0 = 0$ $\mathbf{P}$-f. s. in $\mathcal{G}_t$ enthalten ist. Des weiteren ist für jedes $A \in \sigma(X_0)$ und $s \geq 0$ die Menge $A \cap \{T_t > s\}$ in $\mathcal{G}_t$ enthalten. Dies folgt aus der Eigenschaft, daß $\mathbf{M}$ laut Voraussetzung pur ist. In diesem Fall sind die beiden Filtrationen $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$ und $\mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}}$ rechtsstetig. Damit ist $\langle \mathbf{M} \rangle$ eine $\mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}}$-Zeittransformation, und $\mathbf{T}$ ist an die Filtration $\mathbb{F}^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}}$ adaptiert. Als nächstes betrachten wir für beliebiges $s \geq 0$ ein $A \in \mathcal{F}_s^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$. Da $\mathbf{T}$ eine $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Zeittransformation ist, gilt zunächst $A \cap \{T_t > s\} \in \mathcal{F}_s^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$. Wegen $\mathbf{M} = M_0 + \mathbf{W} \circ \langle \mathbf{M} \rangle$ $\mathbf{P}$-f. s. folgt weiterhin $\mathcal{F}_s^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}_{\langle M \rangle_s}^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}}$. Dies liefert uns aber wegen $\{T_t > s\} \subseteq \{\langle M \rangle_s \leq t\}$ unmittelbar $A \cap \{T_t > s\} \in \mathcal{F}_t^{M_0+\mathbf{W},\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{G}_t$ für jedes $s \geq 0$. Zusammengefaßt erhalten wir insgesamt, daß für jedes $s \geq 0$ und beliebige A aus dem Erzeugendensystem für die σ-Algebra $\mathcal{F}_s^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$ und damit für beliebige $A \in \mathcal{F}_s^{(X_0,\mathbf{M}),\mathbf{P}}$ die Menge $A \cap \{T_t > s\}$ zu $\mathcal{G}_t$ gehört. Also ist der Erzeuger für die σ-Algebra aus (4.4.30) in $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^{(X_0,M_0+\mathbf{W}),\mathbf{P}}$ enthalten, womit der Beweis der Folgerung vollständig ist. □

Faßt man die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen, so erhalten wir insgesamt das

Theorem 4.4.31 *Seien* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *und* μ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. *Dann gilt:*

(1) Es existiert ein Lösung (bzw. Fundamentallösung) von Gleichung (4.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit Startverteilung* μ *genau dann, wenn eine Lösung (bzw. Fundamentallösung) der zu* (4.1.1) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit Startverteilung* μ *existiert.*

(2) Die Existenz einer starken Lösung der zu (4.1.1) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit Startverteilung* μ *impliziert die Existenz einer starken Lösung von* (4.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit Startverteilung* μ*. Ist* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^p_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *so gilt auch die Umkehrung.*

Beweis: Der Beweis dieses Theorems ergibt sich nun unmittelbar aus Satz 4.4.10 zusammen mit Bemerkung 4.4.14, Folgerung 4.4.15, Satz 4.4.25 und Folgerung 4.4.29. $\square$

Im Abschnitt 5.3 werden wir uns weiter mit der Frage der Existenz starker Lösungen beschäftigen.

Kapitel 5

Eindeutigkeit von Lösungen

Neben der Existenz von Lösungen eindimensionaler stochastischer Differentialgleichungen bzgl. stetiger lokaler Martingale als treibende Prozesse ist auch die Frage der Eindeutigkeit der Lösung von großem Interesse. Dabei unterscheidet man in der Theorie stochastischer Differentialgleichungen zwischen der Eindeutigkeit in Verteilung und der pfadweisen Eindeutigkeit der Lösung. Den Begriff der Eindeutigkeit in Verteilung wollen wir im Abschnitt 5.1 präzisieren. Anhand eines Beispiels wollen wir dann zeigen, daß Eindeutigkeit in Verteilung auch bei Einschränkungen an den treibenden Prozeß nicht immer gegeben ist. Der Abschnitt 5.2 widmet sich dann dem eigentlichen Eindeutigkeitssatz für Lösungen eindimensionaler stochastischer Differentialgleichungen bzgl. stetiger lokaler Martingale. Ziel ist es, ein analoges Resultat zu formulieren und zu beweisen, wie es Engelbert und Schmidt (vgl. [18], [19], [20]) für den Fall der Brownschen Bewegung als treibender Prozeß taten. Mit der Frage der pfadweisen Eindeutigkeit und der damit im Zusammenhang stehenden Existenz starker Lösungen werden wir uns im Abschnitt 5.3 beschäftigen. Eine Anwendung der gefundenen Ergebnisse auf Gleichungen mit gewöhnlicher Drift schließt die Arbeit mit dem Abschnitt 5.4 ab.

Für die Ausführungen in diesem Kapitel wollen wir, falls nicht anders angedeutet, stillschweigend voraussetzen, daß die auftretenden Wahrscheinlichkeitsräume vollständig sind.

5.1 Eindeutigkeitsbegriff und Beispiele

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist wiederum die stochastische Differentialgleichung

$$X_t = X_0 + \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a) + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s \tag{5.1.1}$$

(vgl. Abschnitt 4.1). Es ist bekannt, daß es verschiedene Eindeutigkeitsbegriffe für Lösungen stochastischer Differentialgleichungen gibt. Dabei handelt es sich um die Begriffe der Eindeutigkeit in Verteilung und der pfadweisen Eindeutigkeit von Lösungen, wobei wir Letzteres im Abschnitt 5.3 definieren werden. Für Gleichungen vom betrachteten Typ (5.1.1) haben wir folgende Definition für die Eindeutigkeit in Verteilung, wobei im folgenden $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ den Raum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ bezeichnet.

Definition 5.1.2 *Es sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. *Die Lösung (bzw. Fundamentallösung) von Gleichung* (5.1.1) *heißt eindeutig in Verteilung, falls für je zwei Lösungen (bzw. Fundamentallösungen)* $(\mathbf{X}^1, \mathbf{M}^1)$ *und* $(\mathbf{X}^2, \mathbf{M}^2)$ *von Gleichung* (5.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *definiert über den entsprechenden Wahrscheinlichkeitsräumen* $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \mathbf{P}^1)$ *und* $(\Omega^2, \mathcal{F}^2, \mathbf{P}^2)$ *aus* $\mathbf{P}^1_{X_0^1} = \mathbf{P}^2_{X_0^2}$ *auf* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *die Gleichheit der beiden Verteilungen* $\mathbf{P}^1_{\mathbf{X}^1}$ *und* $\mathbf{P}^2_{\mathbf{X}^2}$ *auf* $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ *folgt. Wir sprechen von Eindeutigkeit in der gemeinsamen Verteilung, falls aus* $\mathbf{P}^1_{(X_0^1, M_0^1)} = \mathbf{P}^2_{(X_0^2, M_0^2)}$ *auf* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *folgt* $\mathbf{P}^1_{(\mathbf{X}^1, \mathbf{M}^1)} = \mathbf{P}^2_{(\mathbf{X}^2, \mathbf{M}^2)}$ *auf* $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$.

Wie eingangs bereits erwähnt soll Ziel dieses Kapitels sein, für ein gegebenes Martingalmaß $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ möglichst allgemeine Bedingungen an den Diffusionskoeffizienten b zu formulieren, so daß Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ für jede Startverteilung vorliegt. In einer Arbeit von Engelbert (vgl. [13]) wurde anhand eines Gegenbeispiels zu den Ausführungen von Hoover (vgl. Theorem 3.3 in [23]) gezeigt, daß unter geeigneten Voraussetzungen an b nicht für jedes $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ gegeben ist. Die abschließende Vermutung in [13], daß die Darstellbarkeitseigenschaft des treibenden Prozesses die Verteilungseindeutigkeit der Lösung von (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ garantiert, ist im allgemeinen nicht ausreichend, auch wenn die Funktion b die in [13] geforderte Eigenschaft besitzt. Dies soll folgendes Beispiel zeigen:

Beispiel 5.1.3 Sei $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t \geq 0}$ eine $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ in $\mathcal{F}$. Wir setzen

$$B_t = \int_0^t b(Y_s)\, \mathrm{d}Y_s \quad \text{für} \quad t \geq 0 \tag{5.1.4}$$

mit

$$b(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0\,, \\ -1 & \text{für} \quad x \leq 0\,. \end{cases} \tag{5.1.5}$$

Mit Satz 2.2.11 sieht man leicht, daß $\mathbf{B} = (B_t)_{t \geq 0}$ eine $(\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung ist, und daß

$$Y_t = \int_0^t b(Y_s)\, \mathrm{d}B_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.1.6}$$

gilt. Also ist $(\mathbf{Y}, \mathbf{B})$ im Sinne unserer Definition eine Lösung von (5.1.6) bzgl. $\mathbb{W}$ (vgl. auch die Ausführung im Anchluß von Bemerkung 4.2.5). Entsprechend ist auch $(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{B})$ mit $\tilde{\mathbf{Y}} := (-Y_t)_{t \geq 0}$ eine Lösung von Gleichung (5.1.6) bzgl. $\mathbb{W}$. Hierbei hat man zu beachten, daß aufgrund der Formel für die Aufenthaltszeit (2.3.16) unter Verwendung von (5.1.4) gilt

$$\int_0^t \mathrm{I}_{\{0\}}(Y_s)\, \mathrm{d}B_s = 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.1.7}$$

Man sieht unter Verwendung von Satz 2.2.11 leicht, daß jede Lösung von Gleichung (5.1.6) bzgl. $\mathbb{W}$ eine Brownsche Bewegung ist. Da nun die Verteilung der Brownschen Bewegung gerade das Wiener-Maß $\mathbb{W}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ ist, folgt hieraus, daß die Lösung von (5.1.6) bzgl. $\mathbb{W}$ eindeutig in Verteilung ist. Insbesondere gilt $\mathbf{P_Y} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{Y}}}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$.

Als nächstes betrachten wir die auf $C(\mathbb{R}_+)$ definierte Abbildung $F : C(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$ mit

$$F_t(\mathbf{w}) := \int_0^t (2 + \frac{\mathbf{w}(s)}{1+|\mathbf{w}(s)|})\,\mathrm{d}s\,, \quad t \geq 0\,,\ \mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)\,,$$

wobei an Stelle dieses speziellen Integranden allgemein auch ein Homöomorphismus gewählt werden kann (vgl. Beispiel 5 in [1]). Nach Konstruktion ist für $\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)$ die auf $\mathbb{R}_+$ definierte reellwertige Abbildung $t \mapsto F_t(\mathbf{w})$ stetig und streng monoton wachsend mit $F_0(\mathbf{w}) = 0$ und $\lim\limits_{t\to+\infty} F_t(\mathbf{w}) = +\infty$. Es bezeichne $\mathbf{A} = (A_t)_{t\geq 0}$ bzw. $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_t)_{t\geq 0}$ jeweils die Rechtsinverse von $\mathbf{T} := (F_t(\mathbf{Y}))_{t\geq 0}$ bzw. von $\tilde{\mathbf{T}} := (F_t(\tilde{\mathbf{Y}}))_{t\geq 0}$. Man kann nun zeigen, daß $\mathcal{F}_t^{\mathbf{T}} = \mathcal{F}_t^{\mathbf{Y}} = \mathcal{F}_t^{\tilde{\mathbf{T}}}$ für $t \geq 0$ gilt. Hieraus folgt dann, daß sowohl $\mathbf{A}$ als auch $\tilde{\mathbf{A}}$ zwei endliche $\mathbb{F}^{\mathbf{Y}}$-Zeittransformationen mit streng monoton wachsenden Trajektorien aus E_+ sind.

Unter Verwendung von Satz 2.4.8 (a) ist nun der zeittransformierte Prozeß $\mathbf{M} := \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} \circ \mathbf{A}, \mathbf{P})$-Martingal mit $\langle \mathbf{M} \rangle = \mathbf{A}$ $\mathbf{P}$-f. s. Entsprechend ist auch der Prozeß $\tilde{\mathbf{M}} := \mathbf{B} \circ \tilde{\mathbf{A}}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} \circ \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{P})$-Martingal mit $\langle \mathbf{M} \rangle = \tilde{\mathbf{A}}$ $\mathbf{P}$-f. s. Insbesondere gilt $\mathbf{Q} := \mathbf{P_M} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{M}}}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Zum einen hat man hierfür zu beachten, daß die Trajektorien von $\mathbf{A}$ bzw. $\tilde{\mathbf{A}}$ wohlbestimmte meßbare Funktionale der Trajektorien von $\mathbf{Y}$ bzw. $\tilde{\mathbf{Y}}$ sind. Zum anderen stimmen die Verteilungen von $(\mathbf{Y}, \mathbf{B})$ und $(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{B})$ auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ überein. Dies folgt unmittelar aus (5.1.4), wobei mit (5.1.7) und der Definition von b für $\tilde{\mathbf{Y}}$ gilt

$$\int_0^t b(\tilde{Y}_s)\,\mathrm{d}\tilde{Y}_s = \int_0^t b(Y_s)\,\mathrm{d}Y_s = B_t\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Man vergleiche hierzu auch Theorem 3.1 in [4].

Ziel ist es nun zu zeigen, daß die beiden Prozesse $\mathbf{M}$ und $\tilde{\mathbf{M}}$ zwar die Darstellbarkeitseigenschaft besitzen aber nicht pur sind. Da $(\mathbf{Y}, \mathbf{B})$ Lösung von (5.1.6) ist und $\mathbf{Y}$ als $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$-Brownsche Bewegung die $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft besitzt, sieht man leicht, daß auch $\mathbf{B}$ die $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft besitzt. Aufgrund der Eigenschaften der Trajektorien von $\mathbf{T}$ bzw. $\mathbf{A}$ ist es mit der Definition der Darstellbarkeitseigenschaft nicht schwierig zu zeigen, daß auch $\mathbf{M}$ die $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} \circ \mathbf{A}$-Darstellbarkeitseigenschaft besitzt. Dabei hat man zu beachten, daß $(\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} \circ \mathbf{A}) \circ \mathbf{T} = \mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$ gilt (vgl. Lemma 4 (i) in [14]). Mit dem nachfolgenden Lemma folgt dann schließlich die $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft von $\mathbf{M}$.

Lemma 5.1.8 *Mit den obigen Bezeichnungen gilt* $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} \circ \mathbf{A} = \mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$, *wobei die Gleichheit zweier Filtrationen komponentenweise zu verstehen ist. Entsprechend gilt* $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} \circ \tilde{\mathbf{A}} = \mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{M}},\mathbf{P}}$.

Beweis: Zunächst folgt aus der Definition von $\mathbf{M}$ trivialerweise $\mathcal{F}_t^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}_{A_t}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$ für $t \geq 0$. Wegen $\langle \mathbf{M} \rangle = \mathbf{A}$ $\mathbf{P}$-f. s. und der strengen Monotonie der Trajektorien von $\mathbf{T}$ ist $\mathbf{T}$ eine $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Zeittransformation und somit an die Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$ adaptiert. Dies trifft wegen $\mathcal{F}_t^{\mathbf{Y}} = \mathcal{F}_t^{\mathbf{T}}$ für $t \geq 0$ dann auch auf den Prozeß $\mathbf{Y}$ zu. Somit ist $\mathcal{F}_t^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}_{T_t}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$ für $t \geq 0$. Da $\mathbf{A}$ die Rechtsinverse von $\mathbf{T}$ und darüber hinaus eine $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$-Zeittransformation ist, folgt mit dem Vorhergehenden, daß $\mathbf{A}$ sogar eine $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}$-Zeittransformation ist. Mit Lemma

4 (i) in [14] und der Identität $T_{A_t} = t$ für $t \geq 0$ erhalten wir schließlich, daß $\mathbf{T} \circ \mathbf{A}$ eine $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Zeittransformation ist und

$$\mathcal{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}_{A_t} \subseteq \mathcal{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}_{T_{A_t}} = \mathcal{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}_t$$

für $t \geq 0$ gilt. Zusammengefaßt stimmen somit die beiden Filtrationen $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} \circ \mathbf{A}$ und $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$ überein. □

Nun besitzt $\mathbf{M}$ die $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft, aber $\mathbf{M}$ selbst ist nicht pur. Dies folgt aus der Tatsache, daß

$$\mathcal{F}^{\mathbf{B},\mathbf{P}}_\infty = \mathcal{F}^{|\mathbf{Y}|,\mathbf{P}}_\infty \subsetneq \mathcal{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}_\infty = \mathcal{F}^{\mathbf{T},\mathbf{P}}_\infty = \mathcal{F}^{\langle\mathbf{M}\rangle,\mathbf{P}}_\infty$$

gilt (vgl. Korollar VI.2.2 in [35]). Damit ist der quadratische Variationsprozeß $\langle\mathbf{M}\rangle$ von $\mathbf{M}$ keine $\mathbb{F}^{\mathbf{B},\mathbf{P}}$-Zeittransformation, da sonst $\mathcal{F}^{\langle\mathbf{M}\rangle,\mathbf{P}}_\infty \subseteq \mathcal{F}^{\mathbf{B},\mathbf{P}}_\infty$ gelten müsste. Hieraus folgt dann aber wegen $\mathbf{M} = \mathbf{B} \circ \langle\mathbf{M}\rangle$ $\mathbf{P}$-f. s. und $A_\infty = +\infty$, daß das stetige lokale Martingal $\mathbf{M}$ nicht pur im Sinne von Definition 3.3.1 ist. Entsprechend erhalten wir, daß $\tilde{\mathbf{M}}$ die $\mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{M}},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft besitzt aber nicht pur ist. Also ist $\mathbf{Q} \notin \mathcal{M}^p_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$.

Als nächstes betrachten wir den Prozeß $\mathbf{Y}$. Mit Satz 2.4.8 (a) und unter Verwendung von Lemma 5.1.8 erhalten wir, daß die beiden zeittransformierten reellen stochastischen Prozesse $\mathbf{X} := \mathbf{Y} \circ \mathbf{A}$ bzw. $\tilde{\mathbf{X}} := \mathbf{Y} \circ \tilde{\mathbf{A}}$ jeweils stetige lokale $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$- bzw. $(\mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{M}},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingale über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sind. Darüber hinaus folgt unter Verwendung von Satz 2.4.8 (b), daß sowohl $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ als auch $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{M}})$ Lösungen von (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung δ_0 sind, wobei hier $\nu \equiv 0$ ist. Da $\mathbf{X}$ bzw. $\tilde{\mathbf{X}}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$ bzw. $\mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{M}},\mathbf{P}}$ adaptiert sind, handelt es sich hierbei sogar um starke Lösungen.

Wir behaupten nun, daß die Verteilungen der beiden stetigen lokalen Martingale $\mathbf{X}$ und $\tilde{\mathbf{X}}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ nicht übereinstimmen. Angenommen die Verteilungen der beiden Prozesse $\mathbf{X}$ und $\tilde{\mathbf{X}}$ sind auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ gleich. Entsprechend Folgerung 3.1.8 ist dies wegen $\langle\mathbf{X}\rangle = \mathbf{A}$ $\mathbf{P}$-f. s. und $\langle\tilde{\mathbf{X}}\rangle = \tilde{\mathbf{A}}$ $\mathbf{P}$-f. s. genau dann der Fall, wenn gilt

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{A})} = \mathbf{P}_{(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{A}})} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(E_+)\,.$$

Da sowohl $\mathbf{T}$ als auch $\tilde{\mathbf{T}}$ Prozesse mit streng monoton wachsenden und stetigen Trajektorien sind, ist diese Bedingung gleichwertig mit

$$\text{(5.1.9)} \qquad \mathbf{P}_{(\mathbf{Y},\mathbf{T})} = \mathbf{P}_{(\mathbf{Y},\tilde{\mathbf{T}})} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(E_+)\,.$$

Geht man in (5.1.9) zur bedingten Verteilung bzgl. $\mathbf{Y}$ über und berücksichtigt man, daß $\mathbf{T}$ bzw. $\tilde{\mathbf{T}}$ meßbar bzgl. $\sigma(\mathbf{Y})$ sind, so ist (5.1.9) genau dann erfüllt, wenn für $\mathbb{W}$-fast alle $\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)$ gilt

$$\mathrm{I}_C(F(\mathbf{w})) = \mathrm{I}_C(F(-\mathbf{w})) \quad \text{für alle} \quad C \in \mathfrak{B}(E_+)\,.$$

Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn gilt

$$\text{(5.1.10)} \qquad F(\mathbf{w}) = F(-\mathbf{w}) \quad \text{für} \quad \mathbb{W}\text{-f. a.} \quad \mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)\,.$$

Aus der Definition von F folgt nun, daß die Gleichung $F(\mathbf{w}) = F(-\mathbf{w})$ auf $C(\mathbb{R}_+)$ nur die Lösung $\mathbf{w} \equiv 0$ besitzt. Somit ist (5.1.10) wegen $\mathbb{W}(\{\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+) \,:\, \mathbf{w} \equiv 0\}) = 0$ nicht erfüllt. Mit dem Vorhergehenden folgt dann schließlich, daß die beiden Verteilungen von $\mathbf{X}$ und $\tilde{\mathbf{X}}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ nicht übereinstimmen können. Also liegt hier keine Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit $\nu \equiv 0$ vor. □

Damit haben wir ein Beispiel gefunden, wo die Darstellbarkeitseigenschaft des treibenden Prozesses bzw. die Extremalität von $\mathbf{Q}$ in der Menge $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ im allgemeinen nicht ausreicht, um Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung von Gleichung (5.1.1) zu garantieren. Ein erstes allgemeines Resultat in dieser Richtung wurde in einer Arbeit von Roskosz und Słomiński (vgl. [37]) bewiesen. Hierbei betrachteten sie Gleichungen ohne Drift bzgl. stetiger lokaler Martingale und formulierten hinreichende und notwendige Bedingungen an den Diffusionskoeffizienten, so daß Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung gegeben ist. Dabei setzten sie zusätzlich voraus, daß der treibende Prozeß selbst Lösung einer gewissen stochastischen Differentialgleichung ohne Drift bzgl. des Wiener-Maßes ist, welche sogar ein pures stetiges lokales Martingal ist (vgl. Satz 5.2.4 im nächsten Abschnitt).

5.2 Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung

Im folgenden wollen wir uns nun der Frage der Eindeutigkeit in Verteilung von Lösungen stochastischer Differentialgleichungen vom betrachteten Typ (5.1.1) widmen. Angeregt durch das Beispiel im vorhergehenden Abschnitt und den Ergebnissen aus Roskosz und Słomiński (vgl. [37]) wollen wir die Klasse der stetigen lokalen Martingale als treibende Prozesse zunächst dahingehend einschränken, daß wir pure stetige lokale Martingale betrachten. Am Schluß dieses Abschnitts werden weitere Fälle behandelt, wo diese Bedingung an den treibenden Prozeß nicht erfüllt ist.

Ausgangspunkt der nun nachfolgenden Ausführungen ist die Gleichung ohne Drift, also

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s\,. \tag{5.2.1}$$

Unter der Annahme, daß der treibende Prozeß von Gleichung (5.2.1) ein pures stetiges lokales Martingal ist, wollen wir zunächst zeigen, daß die Fundamentallösung von Gleichung (5.2.1) ununterscheidbar von einem puren stetigen lokalen Martingal ist. Darauf aufbauend läßt sich dann die Eindeutigkeit in Verteilung einer beliebigen Lösung bzw. Fundamentallösung von Gleichung (5.2.1) und damit auch von (5.1.1) ableiten (vgl. Satz 4.3.16). Dabei wird die Lösung der zu (5.2.1) assoziierten Gleichung eine zentrale Rolle spielen. Deswegen wollen wir in einem ersten Schritt die Lösungen der zu (5.2.1) assoziierten Gleichung im Hinblick auf unsere Annahme näher betrachten, wobei dieses in einem allgemeineren Rahmen vorgenommen werden soll.

Gegeben sei ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$. Weiterhin seien $\overline{\mathbf{W}} = (\overline{W}_t)_{t\geq 0}$ eine in τ gestoppte $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung und ξ eine reelle $\mathcal{F}_0$-meßbare Zufallsgröße. Für ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ gelte

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(Y_s)\,\mathrm{d}\overline{W}_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.2.2}$$

sowie

$$\int_0^{D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau} \mathrm{I}_{N_b}(Y_s)\,\mathrm{d}s = 0 \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.2.3}$$

Mit anderen Worten, $(\mathbf{Y}, \xi + \overline{\mathbf{W}})$ ist eine Fundamentallösung von (5.2.1) bzgl. $\mathbf{P}_{\xi+\overline{\mathbf{W}}}$. Man beachte, daß wegen (2.2.10) der Startwert ξ keinen Einfluß auf das stochastische Integral in (5.2.2) hat. Der nun folgende Satz ist für alles weitere grundlegend.

Satz 5.2.4 *Sei $\overline{\mathbf{W}}$ pur. Dann ist der Lösungsprozeß $\mathbf{Y}$ ebenfalls pur.*

Beweis: Für das stetige lokale $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal $\overline{\mathbf{W}}$ gilt $\langle \overline{W} \rangle_t = t \wedge \tau$ für $t \geq 0$ $\mathbf{P}$-f. s. Hieraus und aus (5.2.2) erhalten wir für den quadratischen Variationsprozeß $\langle \mathbf{Y} \rangle = (\langle Y \rangle_t)_{t \geq 0}$ von $\mathbf{Y}$ die Beziehung

$$\langle Y \rangle_t = \int_0^t b^2(Y_s)\, \mathrm{d}\langle \overline{W} \rangle_s = \int_0^{t\wedge\tau} b^2(Y_s)\, \mathrm{d}s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.2.5}$$

Mit Satz 4.2.14 (c) und wegen $\langle \mathbf{Y} \rangle^\tau = \langle \mathbf{Y} \rangle$ $\mathbf{P}$-f. s. (vgl. auch Satz 4.4.3) gilt dann

$$\langle Y \rangle_{t \wedge D^{\mathbf{Y}}_{E_b} \wedge \tau} = \langle Y \rangle_t\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.2.6}$$

Insbesondere ist

$$\langle Y \rangle_\infty = \langle Y \rangle_{D^{\mathbf{Y}}_{E_b} \wedge \tau} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.2.7}$$

Bezeichnet $\mathbf{C} = (C_t)_{t \geq 0}$ die Rechtsinverse von $\langle \mathbf{Y} \rangle$. Von dem zeittransformierten Prozeß

$$\mathbf{Y} \circ \mathbf{C} - Y_0 = (Y_{C_t} - Y_0)_{t \geq 0}$$

wissen wir aus Satz 3.1.22, daß dieser ununterscheidbar von einem stetigen $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}_+ \circ \mathbf{C}$-adaptierten Prozeß $\widetilde{\mathbf{W}} = (\widetilde{W}_t)_{t \geq 0}$ ist, so daß $\widetilde{\mathbf{W}}$ eine in $\langle Y \rangle_\infty$ gestoppte $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}_+ \circ \mathbf{C}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung ist.

Es ist nun zu zeigen, daß $\mathbf{Y}$ pur ist. Nach Definition ist hierfür zu zeigen, daß $\langle Y \rangle_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{Y_0 + \widetilde{\mathbf{W}}, \mathbf{P}}$-Stoppzeit und $\langle \mathbf{Y} \rangle$ eine $\mathbb{F}^{Y_0 + \widetilde{\mathbf{W}}, \mathbf{P}}_+$-Zeittransformation ist. Letzteres ist wegen (vgl. (2.4.4))

$$\{C_s < t\} = \{s < \langle Y \rangle_t\} \quad \text{für alle} \quad s, t \geq 0$$

äquivalent dazu, daß $\mathbf{C}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{Y_0 + \widetilde{\mathbf{W}}, \mathbf{P}}_+$ adaptiert ist. Wenn man nun noch beachtet, daß $\langle \widetilde{W} \rangle_\infty = \langle Y \rangle_\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. gilt und $\langle \widetilde{W} \rangle_\infty$ eine $\mathbb{F}^{Y_0 + \widetilde{\mathbf{W}}, \mathbf{P}}_+$-Stoppzeit ist, erhalten wir mit dem nachfolgenden Satz unmittelbar die zu beweisende Behauptung. □

Satz 5.2.8 *Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 5.2.4 gilt:*

(a) Die Rechtsinverse $\mathbf{C} = (C_t)_{t \geq 0}$ besitzt die Darstellung

$$C_t = \begin{cases} \int_0^t b^{-2}(Y_0 + \widetilde{W}_s)\, \mathrm{d}s\,, & t < \langle \widetilde{W} \rangle_\infty\,, \\ +\infty\,, & t \geq \langle \widetilde{W} \rangle_\infty\,, \end{cases} \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.2.9}$$

und ist somit an die Filtration $\mathbb{F}^{Y_0 + \widetilde{\mathbf{W}}, \mathbf{P}}_+$ adaptiert.

(b) Ist $\overline{\mathbf{W}}$ pur, so ist $\langle Y \rangle_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{Y_0 + \widetilde{\mathbf{W}}, \mathbf{P}}$-Stoppzeit.

Beweis: Für den Beweis von (a) betrachten wir die in $\langle Y\rangle_\infty$ gestoppte $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} \circ \mathbf{C}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung $\widetilde{\mathbf{W}}$. Mittels Zeittransformation im Integral (vgl. Satz 2.4.6) erhalten wir wegen

$$\mathbf{Y} \circ \mathbf{C} = Y_0 + \widetilde{\mathbf{W}} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.2.10}$$

und unter Beachtung von (5.2.3), (5.2.5) sowie (5.2.6) die Beziehung

$$\int_0^{\langle Y\rangle_t} b^{-2}(Y_0 + \widetilde{W}_s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{t\wedge D_{E_b}^{\mathbf{Y}}\wedge\tau} b^{-2}(Y_s)\,\mathrm{d}\langle Y\rangle_s = \int_0^{t\wedge D_{E_b}^{\mathbf{Y}}\wedge\tau} \mathrm{I}_{N_b^c}(Y_s)\,\mathrm{d}s = t \wedge D_{E_b}^{\mathbf{Y}} \wedge \tau$$

für $t \geq 0$ $\mathbf{P}$-f. s. Für $t < \langle Y\rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}\wedge\tau}$ ist $C_t < D_{E_b}^{\mathbf{Y}} \wedge \tau$ sowie $\langle Y\rangle_{C_t} = t$ $\mathbf{P}$-f. s., wenn man (5.2.7) berücksichtigt. Wendet man die $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}}$-Zeittransformation $\mathbf{C}$ auf die vorhergehende Gleichung an, so gilt

$$\int_0^t b^{-2}(Y_0 + \widetilde{W}_s)\,\mathrm{d}s = C_t \quad \text{für} \quad t < \langle Y\rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}\wedge\tau} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Mit $\langle Y\rangle_\infty = \langle\widetilde{W}\rangle_\infty$ $\mathbf{P}$-f. s. und (5.2.7) erhalten wir schließlich folgende Darstellung für die Rechtsinverse $\mathbf{C} = (C_t)_{t\geq 0}$

$$C_t = \begin{cases} \int_0^t b^{-2}(Y_0 + \widetilde{W}_s)\,\mathrm{d}s\,, & t < \langle\widetilde{W}\rangle_\infty\,, \\ +\infty\,, & t \geq \langle\widetilde{W}\rangle_\infty\,, \end{cases} \qquad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.2.11}$$

Für jedes $t \geq 0$ ist das obige Integral nach dem Satz von Fubini $\mathcal{F}_t^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-meßbar. Des weiteren ist $\langle\widetilde{W}\rangle_\infty$ eine $\mathbb{F}_+^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit. Daraus folgt aber, daß $\mathbf{C}$ an die Filtration $\mathbb{F}_+^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$ adaptiert ist.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß $\langle Y\rangle_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit ist. Wegen (5.2.7) ist dies bereits dann erfüllt, wenn $\langle Y\rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}\wedge\tau}$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit ist. Hierzu genügt es zu zeigen, daß $\langle Y\rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}\wedge\tau}$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}_+^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit ist und $\{\langle Y\rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}\wedge\tau} = 0\} \in \mathcal{F}_0^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$ gilt (vgl. Abschnitt 1.2 in [14]).

Wie die folgenden Überlegungen zeigen, gilt

$$\mathcal{F}_t^{\overline{\mathbf{W}}^{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}},\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} \quad (t \geq 0)\,. \tag{5.2.12}$$

Unter Verwendung von (5.2.5) ist zunächst

$$\int_0^t b^{-2}(Y_s)\mathrm{I}_{N_b^c}(Y_s)\,\mathrm{d}\langle Y\rangle_s = \int_0^t \mathrm{I}_{N_b^c}(Y_s)\,\mathrm{d}\langle\overline{W}\rangle_s \leq \langle\overline{W}\rangle_t < +\infty\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Hieraus folgt, daß der stochastische Prozeß

$$\left(\int_0^t b^{-1}(Y_s)\mathrm{I}_{N_b^c}(Y_s)\,\mathrm{d}Y_s\right)_{t\geq 0}$$

wohldefiniert und ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Durch Abstoppen dieses Prozesses mit der $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$-Stoppzeit $D^{\mathbf{Y}}_{E_b}$ erhalten wir mit (5.2.2) sowie (5.2.3)

$$\int_0^{t\wedge D^{\mathbf{Y}}_{E_b}} b^{-1}(Y_s)\mathrm{I}_{N_b^c}(Y_s)\,\mathrm{d}Y_s = \int_0^{t\wedge D^{\mathbf{Y}}_{E_b}} \mathrm{I}_{N_b^c}(Y_s)\,\mathrm{d}\overline{W}_s = \overline{W}_{t\wedge D_{E_b^{\mathbf{Y}}}}\,, \quad t\geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Damit ist aber der gestoppte Prozeß $\overline{\mathbf{W}}^{D^{\mathbf{Y}}_{E_b}} = (\overline{W}_{t\wedge D^{\mathbf{Y}}_{E_b}})_{t\geq 0}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$-adaptiert, und dies liefert uns die Richtigkeit von (5.2.12).

Laut Voraussetzung ist $\overline{\mathbf{W}}$ ein pures stetiges lokales Martingal. Somit ist τ nach Satz 3.3.4 eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit, was aber äquivalent dazu ist, daß τ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}}_+$-Stoppzeit ist und $\{\tau = 0\} \in \mathcal{F}^{\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}}_0$ gilt (vgl. hierzu die Ausführungen in Abschnitt 1.2 von [14]). Des weiteren ist $D^{\mathbf{Y}}_{E_b}$ unter Verwendung von Satz 2.1.5 (b) eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}_+$-Stoppzeit mit $\{D^{\mathbf{Y}}_{E_b} = 0\} = \{Y_0 \in E_b\} \in \mathcal{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}_0$, wobei die Gleichheit der beiden Mengen aus der Abgeschlossenheit von E_b und der Stetigkeit von $\mathbf{Y}$ folgt. Mit anderen Worten, $D^{\mathbf{Y}}_{E_b}$ ist eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$-Stoppzeit. Aus (5.2.12) erhalten wir unter Anwendung des nachfolgenden Lemmas und der daran anschließenden Bemerkung, daß $D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}_+$-Stoppzeit ist. Damit existiert eine monoton wachsende Folge $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{F}^{\mathbf{Y}}_+$-Stoppzeiten mit $\zeta_n \leq D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau$ für $n\in\mathbb{N}$, so daß gilt:

(i) $\zeta_n < D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau$ auf $\{D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau > 0\}$ für $n\in\mathbb{N}$ $\mathbf{P}$-f. s. und

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\zeta_n = D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau$ $\mathbf{P}$-f. s.

(vgl. Satz 2.1.4). Wir wollen nun zu zeigen, daß

$$\tilde{\zeta}_n := \langle Y\rangle_{\zeta_n} \leq \langle Y\rangle_{D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau} \quad (n\in\mathbb{N})$$

eine ankündigende Folge von $\mathbb{F}^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}_+$-Stoppzeiten für $\langle Y\rangle_{D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau}$ ist. Dies würde dann beweisen, daß $\langle Y\rangle_{D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau}$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}_+$-Stoppzeit ist (vgl. Satz 2.1.4.)

Nach Konstruktion ist $(\tilde{\zeta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von zufälligen Zeiten, für die $\lim\limits_{n\to+\infty}\tilde{\zeta}_n = \langle Y\rangle_{D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau}$ $\mathbf{P}$-f. s. sowie $\tilde{\zeta}_n < \langle Y\rangle_{D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau}$ auf $\{\langle Y\rangle_{D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau} > 0\}$ für $n\in\mathbb{N}$ $\mathbf{P}$-f. s. gilt. Letzteres folgt aus (i) unter Verwendung von (5.2.3), (5.2.5) und (5.2.6). Denn in diesem Fall ist für $\mathbf{P}$-f. a. $\omega\in\Omega$ die Trajektorie $\langle\mathbf{Y}\rangle(\omega)$ auf $[0, D^{\mathbf{Y}}_{E_b}(\omega)\wedge\tau(\omega)[$ streng monoton wachsend, und es ist

$$\langle Y\rangle_{D^{\mathbf{Y}}_{E_b}\wedge\tau}(\omega) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad D^{\mathbf{Y}}_{E_b}(\omega)\wedge\tau(\omega) > 0\,. \tag{5.2.13}$$

Daß $\tilde{\zeta}_n$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ eine $\mathbb{F}^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}_+$-Stoppzeit ist, sieht man wie folgt. Da die $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}_+$-Zeittransformation $\mathbf{C}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}_+$ adaptiert ist, erhalten wir entsprechend dem Beweis von Proposition 5 in [15] für die zeittransformierte Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}_+\circ\mathbf{C}$ die Beziehung

$$\mathbb{F}^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}_+ = \mathbb{F}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}_+\circ\mathbf{C}\,, \tag{5.2.14}$$

wobei Gleichheit zweier Filtrationen komponentenweise zu verstehen ist. Mit der Eigenschaft, daß ζ_n eine $\mathbb{F}_+^{\mathbf{Y}}$-Stoppzeit ist, erhalten wir hieraus und mit (2.4.4)

$$\{\tilde{\zeta}_n > t\} = \{\langle Y\rangle_{\zeta_n} > t\} = \{\zeta_n > C_t\} \in \mathcal{F}_{C_t+}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} = \mathcal{F}_{t+}^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}} \quad (n \in \mathbb{N}\,,\, t \geq 0)\,.$$

Zusammengefaßt ist somit $(\tilde{\zeta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ankündigende Folge von $\mathbb{F}_+^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeiten für die $\mathbb{F}_+^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit $\langle Y\rangle_\infty$ bzw. $\langle Y\rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}\wedge\tau}$. Mit Satz 2.1.4 (angewandt auf die Filtration $\mathbb{F}_+^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$) ist dann $\langle Y\rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}\wedge\tau}$ somit eine vorhersagbare $\mathbb{F}_+^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit. Darüber hinaus gilt

$$\{\langle Y\rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}\wedge\tau} = 0\} \in \mathcal{F}_0^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} = \mathcal{F}_0^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}\,.$$

Dies folgt aus der für $\mathbf{P}$-f. a. $\omega \in \Omega$ gültigen Beziehung (5.2.13) und da die Menge $\{D_{E_b}^{\mathbf{Y}} \wedge \tau = 0\}$ in $\mathcal{F}_0^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$ liegt. Für Letzteres vergleiche man nachfolgende Bemerkung 5.2.16. Insgesamt haben wir damit gezeigt, daß $\langle Y\rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}\wedge\tau}$ bzw. $\langle Y\rangle_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit ist. □

Als nächstes wollen wir die im Beweis des vorhergehenden Satzes angekündigte Aussage hinsichtlich der Stoppzeit $D_{E_b}^{\mathbf{Y}} \wedge \tau$ verifizieren. Da diese Aussage nicht problemspezifisch ist, wollen wir diese in einem allgemeineren Kontext formulieren. Dazu seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ sowie $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ zwei Filtrationen in $\mathcal{F}$.

Lemma 5.2.15 *Seien τ eine $\mathbb{G}_+$-Stoppzeit sowie σ eine $\mathbb{H}_+$-Stoppzeit und für jedes $t \geq 0$ gelte $\mathcal{G}_{t+} \cap \{\sigma > t\} \subseteq \mathcal{H}_{t+}$. Dann ist $\sigma \wedge \tau$ eine $\mathbb{H}_+$-Stoppzeit. Sind τ und σ darüber hinaus jeweils vorhersagbare $\mathbb{G}_+$- bzw. $\mathbb{H}_+$-Stoppzeiten, so ist auch $\sigma \wedge \tau$ eine vorhersagbare $\mathbb{H}_+$-Stoppzeit.*

Beweis: Seien zunächst τ eine $\mathbb{G}_+$-Stoppzeit und σ eine $\mathbb{H}_+$-Stoppzeit. Es ist zu zeigen, daß für jedes $t \geq 0$ gilt

$$\{\sigma \wedge \tau \leq t\} \in \mathcal{H}_{t+}\,.$$

Dazu sei $t \geq 0$ fest, aber beliebig gewählt. Dann ist

$$\{\sigma \wedge \tau > t\} = \{\tau > t\} \cap \{\sigma > t\} \in \mathcal{G}_{t+} \cap \{\sigma > t\} \subseteq \mathcal{H}_{t+}\,.$$

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung des ersten Teils.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß dies auch richtig bleibt, wenn τ und σ jeweils vorhersagbare $\mathbb{G}_+$- bzw. $\mathbb{H}_+$-Stoppzeiten sind. Dazu wollen wir Satz 2.1.4 anwenden. Nach diesem Satz gibt es eine ankündigende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{G}_+$-Stoppzeiten für τ sowie eine ankündigende Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{H}_+$-Stoppzeiten für σ. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$T_n := \sigma_n \wedge \tau_n \leq \sigma \wedge \tau\,,$$

und wir behaupten, daß $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ankündigende Folge von $\mathbb{H}_+$-Stoppzeiten für $\sigma\wedge\tau$ ist. Man sieht leicht, daß $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von zufälligen Zeiten ist, für die $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \sigma \wedge \tau$ $\mathbf{P}$-f. s. gilt. Darüber hinaus ist es auch nicht schwierig, die Gültigkeit von $T_n < \sigma \wedge \tau$ auf $\{\sigma \wedge \tau > 0\}$ für $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{P}$-f. s. zu verifizieren. Mit $\sigma_n \leq \sigma$ für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\mathcal{G}_{t+} \cap \{\sigma_n > t\} = \mathcal{G}_{t+} \cap \{\sigma > t\} \cap \{\sigma_n > t\} \subseteq \mathcal{H}_{t+} \quad (t \geq 0)\,.$$

Aus dem ersten Teil des Satzes folgt dann aber, daß T_n eine $\mathbb{H}_+$-Stoppzeit für $n \in \mathbb{N}$ ist. Somit ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ankündigende Folge von $\mathbb{H}_+$-Stoppzeiten für $\sigma \wedge \tau$, womit der Beweis des Lemmas vollständig ist. $\square$

Bemerkung 5.2.16 Um dieses Lemma im Beweis von Satz 5.2.8 anwenden zu können, hat man zu beachten, daß für einen stochastischen Prozeß $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ gilt

$$\mathcal{F}_t^{\mathbf{X}} \cap \{\sigma > t\} = \mathcal{F}_t^{\mathbf{X}^\sigma} \cap \{\sigma > t\} \quad (t \geq 0)\,, \tag{5.2.17}$$

wobei σ eine beliebige zufällige Zeit über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ bezeichnet. Die Gleichheit der beiden σ-Algebren folgt aus der Beziehung

$$\sigma(\mathcal{E} \cap A) = \sigma(\mathcal{E}) \cap A\,,$$

Dabei ist $A \subseteq \Omega$ beliebig gewählt und $\mathcal{E}$ ein beliebiges Mengensystem von Teilmengen aus Ω ist (vgl. Korollar I.4.5 in [10]). Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 5.2.8 erhalten wir aus (5.2.12) sowie (5.2.17) die Inklusion

$$\mathcal{F}_{t+}^{\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}} \cap \{D_{E_b}^{\mathbf{Y}} > t\} = \mathcal{F}_t^{\overline{\mathbf{W}}^{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}},\mathbf{P}} \cap \{D_{E_b}^{\mathbf{Y}} > t\} \subseteq \mathcal{F}_{t+}^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} \quad (t \geq 0)\,.$$

Hierbei hat man zu beachten, daß wegen der vorausgesetzten Purheit von $\overline{\mathbf{W}}$ die Filtration $\mathbb{F}^{\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$ rechtsstetig ist. Hieraus folgt dann aber unmittelbar, daß $D_{E_b}^{\mathbf{Y}} \wedge \tau$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}_+^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$-Stoppzeit ist. Des weiteren erhalten wir mit (5.2.12) und (5.2.17)

$$\{D_{E_b}^{\mathbf{Y}} \wedge \tau > 0\} = \{\tau > 0\} \cap \{D_{E_b}^{\mathbf{Y}} > 0\} \in \mathcal{F}_0^{\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}} \cap \{D_{E_b}^{\mathbf{Y}} > 0\} \subseteq \mathcal{F}_0^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}\,,$$

woraus $\{D_{E_b}^{\mathbf{Y}} \wedge \tau = 0\} \in \mathcal{F}_0^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$ folgt.

Bemerkung 5.2.18 Wie der Beweis von Satz 5.2.8 erkennen läßt, reicht es nicht aus zu fordern, daß $\xi + \overline{\mathbf{W}}$ ein pures stetiges lokales Martingal ist. In diesem Fall muß nämlich $D_{E_b}^{\mathbf{Y}} \wedge \tau$ keine vorhersagbare $\mathbb{F}_+^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$-Stoppzeit sein. Denn wählt man $\xi + \overline{\mathbf{W}}$ anstelle von $\overline{\mathbf{W}}$ als treibenden Prozeß in (5.2.2), so erhalten wir mit den gleichen Rechnungen wie im Beweis von Satz 5.2.8 dieselbe Inklusion

$$\mathcal{F}_t^{\overline{\mathbf{W}}^{D_{E_b}^{\mathbf{Y}}},\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\mathbf{Y},\mathbf{P}} \quad (t \geq 0)\,.$$

Ist dann $\xi + \overline{\mathbf{W}}$ pur, was mit Satz 3.3.4 äquivalent dazu ist, daß τ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\xi+\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit ist, so muß τ nicht notwendigerweise eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\overline{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit sein. Diese Bedingung wurde aber gerade im Beweis von Satz 5.2.8 unter Verwendung der obigen Inklusion benötigt, um eben zu zeigen, daß $D_{E_b}^{\mathbf{Y}} \wedge \tau$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}_+^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$-Stoppzeit ist, was dann die notwendige Vorhersagbarkeit der $\mathbb{F}^{Y_0+\widetilde{\mathbf{W}},\mathbf{P}}$-Stoppzeit $\langle Y \rangle_\infty$ implizierte.

Nun wollen wir ein analoges Resultat zu Satz 5.2.4 für Fundamentallösungen von Gleichung (5.2.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ zeigen, wobei wir zusätzliche Voraussetzungen an das Martingalmaß $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ stellen müssen. Dazu sei $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Fundamentallösung von Gleichung (5.2.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ definiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$. Dabei wollen wir entsprechend unserer Vereinbarung zunächst annehmen, daß $\mathbf{X}$ ein nicht-explodierendes stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist (vgl. Satz 4.2.2), welches $\mathbf{T}$-stetig ist und für welches in $\mathbb{R}$ der Grenzwert

$X_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} X_t$ auf $\{\langle M\rangle_\infty < +\infty\}$ existiert (vgl. Satz 4.4.16 und die daran anschliessende Ausführung).

Gemäß Satz 4.4.25 ist dann $(\mathbf{X}\circ\mathbf{T},\mathbf{M})$ eine Fundamentallösung der zu (5.2.1) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$. Insbesondere ist $\mathbf{X}\circ\mathbf{T}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}}\circ\mathbf{T},\,\mathbf{P})$-Martingal. Nach Satz 5.2.4 ist der Lösungsprozeß $\mathbf{X}\circ\mathbf{T}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T},\mathbf{P}},\,\mathbf{P})$-Martingal, falls die zu $\mathbf{M}$ assoziierte Brownsche Bewegung $\mathbf{W}$ pur ist. Mit Satz 3.3.7 und der $\mathbf{T}$-Stetigkeit von $\mathbf{X}$ ist wegen $\mathbf{X}=(\mathbf{X}\circ\mathbf{T})\circ\langle\mathbf{M}\rangle$ der Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{X},\mathbf{P}},\,\mathbf{P})$-Martingal, falls der quadratische Variationsprozeß $\langle\mathbf{M}\rangle$ eine $\mathbb{F}_+^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T},\mathbf{P}}$-Zeittransformation ist. Eine hinreichende Bedingung unter Beachtung von Bemerkung 5.2.18 ist hierfür die Purheit des stetigen lokalen $(\mathbb{F},\,\mathbf{P})$-Martingals ${}^0\mathbf{M}=(M_t-M_0)_{t\geq 0}$.

Satz 5.2.19 *Sei* $\mathbf{Q}\in\mathcal{M}_{loc}^{0,p}(C(\mathbb{R}_+))$. *Dann ist der Lösungsprozeß* $\mathbf{X}$ *ein pures stetiges lokales* $(\mathbb{F}^{\mathbf{X},\mathbf{P}},\,\mathbf{P})$*-Martingal.*

Beweis: Gemäß der vorhergehenden Ausführungen ist $(\mathbf{X},\mathbf{M})$ eine Fundamentallösung von (5.2.1) bzgl. $\mathbf{Q}$. Da $\mathbf{P}_{\mathbf{M}}=\mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ gilt, ist ${}^0\mathbf{M}$ laut Voraussetzung und mit Satz 3.3.18 ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F},\,\mathbf{P})$-Martingal. Mit der zu ${}^0\mathbf{M}$ assoziierten $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{M},\mathbf{P}}\circ\mathbf{T},\,\mathbf{P})$-Brownschen Bewegung $\mathbf{W}$, welche mit der zu $\mathbf{M}$ assoziierten Brownschen Bewegung übereinstimmt, ist dann nach Definition $\langle\mathbf{M}\rangle=(\langle M\rangle_t)_{t\geq0}$ eine $\mathbb{F}_+^{\mathbf{W},\mathbf{P}}$-Zeittransformation und $\langle M\rangle_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\mathbf{W},\mathbf{P}}$-Stoppzeit. Mit Satz 3.3.4 ist darüber hinaus $\mathbf{W}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{W},\mathbf{P}},\,\mathbf{P})$-Martingal, und somit ist $\mathbb{F}^{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ eine rechtsstetige Filtration.

Gemäß Satz 4.4.25 ist $(\mathbf{X}\circ\mathbf{T},\mathbf{M})$ eine Fundamentallösung der zu (5.2.1) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$. Da $\mathbf{W}$ pur ist, folgt aus Satz 5.2.4, daß $\mathbf{X}\circ\mathbf{T}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T},\mathbf{P}},\,\mathbf{P})$-Martingal ist. Analog dem Beweis von Satz 5.2.8 kann man nun zeigen (vgl. (5.2.12))

$$\mathcal{F}_t^{\mathbf{W}^{D_{E_b}^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}}},\mathbf{P}}\subseteq\mathcal{F}_t^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T},\mathbf{P}}\quad(t\geq0)\,.$$

Mit der $\mathbb{F}^{\mathbf{W},\mathbf{P}}$-Zeittransformation $\langle\mathbf{M}\rangle$ erhalten wir unter Verwendung von Lemma 5.2.15 sowie Bemerkung 5.2.16, daß der Prozeß $\mathbf{A}=(A_t)_{t\geq0}$ mit $A_t:=D_{E_b}^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}}\wedge\langle M\rangle_t$ $(t\geq0)$ eine $\mathbb{F}_+^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T},\mathbf{P}}$-Zeittransformation mit Trajektorien in E_+ ist. Darüber hinaus gilt mit Satz 4.4.19

$$A_t=D_{E_b}^{\mathbf{X}\circ\mathbf{T}}\wedge\langle M\rangle_t=\langle M\rangle_{D_{E_b}^{\mathbf{X}}\wedge t}\,,\quad t\geq0\,,\quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Unter Verwendung von Satz 4.2.14 (b) sowie der $\mathbf{T}$-Stetigkeit von $\mathbf{X}$ erhalten wir die Identität

$$(\mathbf{X}\circ\mathbf{T})\circ\mathbf{A}=\mathbf{X}^{D_{E_b}^{\mathbf{X}}}=\mathbf{X}\quad\mathbf{P}\text{-f. s.}\tag{5.2.20}$$

Mit Satz 3.3.7 folgt dann aber hieraus schließlich, daß $\mathbf{X}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{X},\mathbf{P}},\,\mathbf{P})$-Martingal ist. □

Zusammenfassend läßt sich nun folgendes aussagen.

Satz 5.2.21 *Sei* $\mathbf{Q}\in\mathcal{M}_{loc}^{0,p}(C(\mathbb{R}_+))$. *Dann ist der Lösungsprozeß einer Fundamentallösung von Gleichung* (5.2.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *ununterscheidbar von einem puren stetigen lokalen Martingal.*

Damit sind wir nun in der Lage, das folgende grundlegende Theorem hinsichtlich der Eindeutigkeit in Verteilung von Lösungen der stochastischen Differentialgleichung (5.2.1) zu beweisen.

Theorem 5.2.22 *Sei $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{0,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. Dann ist für eine gegebene Startverteilung μ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ die Fundamentallösung von Gleichung* (5.2.1) *bzgl. $\mathbf{Q}$ eindeutig in Verteilung.*

Beweis: Für $i = 1, 2$ sei $(\mathbf{X}^i, \mathbf{M}^i)$ eine Fundamentallösung von (5.2.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ definiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i)$ mit Filtration $\mathbb{F}^i = (\mathcal{F}^i_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}^i$. Für die beiden Lösungsprozesse $\mathbf{X}^1$ und $\mathbf{X}^2$ gelte zunächst $\mathbf{P}^1_{X^1_0} = \mu = \mathbf{P}^2_{X^2_0}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Es ist nun zu zeigen, daß

$$\mathbf{P}^1_{\mathbf{X}^1} = \mathbf{P}^2_{\mathbf{X}^2} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \tag{5.2.23}$$

gilt. Entsprechend Satz 4.2.2 bzw. Satz 5.2.21 ist $\mathbf{X}^1$ bzw. $\mathbf{X}^2$ ununterscheidbar von einem puren stetigen lokalen $({\mathbb{F}^i}^{\mathbf{P}^i}, \mathbf{P}^i)$-Martingal. Nach Definition nimmt jedes stetige lokale Martingal reelle Werte an. Um die Richtigkeit von (5.2.23) zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß die Verteilungen der von $\mathbf{X}^1$ bzw. $\mathbf{X}^2$ ununterscheidbaren Prozesse auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ übereinstimmen. Daher wollen wir nun ohne Einschränkung annehmen, daß $\mathbf{X}^i$ ein pures stetiges lokales $({\mathbb{F}^i}^{\mathbf{P}^i}, \mathbf{P}^i)$-Martingal ist $(i = 1, 2)$.

Mit dieser Vorbemerkung betrachten wir die beiden Verteilungen $\mathbf{P}^1_{(\mathbf{X}^1,\mathbf{M}^1)}$ und $\mathbf{P}^2_{(\mathbf{X}^2,\mathbf{M}^2)}$ auf dem Produktraum $(C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$. Damit definieren wir wie folgt einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$:

$$\Omega := C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+)\,, \quad \mathcal{F}^o := \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))\,,$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\big(\,\mathbf{P}^1_{(\mathbf{X}^1,\mathbf{M}^1)} + \mathbf{P}^2_{(\mathbf{X}^2,\mathbf{M}^2)}\big)\,,$$

und $\mathcal{F}$ ist die Vervollständigung von $\mathcal{F}^o$ bzgl. $\mathbf{P}$. Über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ definieren wir zwei reelle stochastische Prozesse $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ und $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ durch

$$X_t(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) := \mathbf{w}_1(t) \quad \text{und} \quad M_t(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) := \mathbf{w}_2(t)$$

für $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \Omega$ und $t \geq 0$. Nach Definition ist $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{M}$ jeweils die Projektion auf die erste bzw. zweite Komponente von Ω. Als Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ wählen wir die augmentierte kanonische Filtration der beiden Prozesse $\mathbf{X}$ und $\mathbf{M}$, also

$$\mathcal{F}_t := \sigma((X_s, M_s) :\ 0 \leq s \leq t)^{\mathbf{P}} \quad (t \geq 0)\,.$$

Es ist nun mit den Stoppzeiten aus dem Beweis von Satz 3.1.2 nicht schwer zu zeigen, daß $\mathbf{X}$ und $\mathbf{M}$ jeweils stetige lokale $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingale sowie $(\mathbb{F}, \mathbf{P}^i_{(\mathbf{X}^i,\mathbf{M}^i)})$-Martingale $(i = 1, 2)$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sind. Des weiteren gilt auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{M})} = \mathbf{P} = \frac{1}{2}\big(\,\mathbf{P}^1_{(\mathbf{X}^1,\mathbf{M}^1)} + \mathbf{P}^2_{(\mathbf{X}^2,\mathbf{M}^2)}\big)\,. \tag{5.2.24}$$

Für die Verteilung von $\mathbf{M}$ gilt nun $\mathbf{P_M} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Gemäß der Voraussetzung erhalten wir hieraus mittels Satz 3.3.18, daß ${}^0\mathbf{M}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ist. Weiterhin existiert nach Satz 3.1.6 eine $\mathbf{Q}$-f. s. eindeutig bestimmte $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(E_+)$-meßbare Abbildung $\mathbf{\Phi} : C(\mathbb{R}_+) \to E_+$ mit

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \mathbf{\Phi}(\mathbf{M}) \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.2.25}$$

bzw.

$$\langle \mathbf{M}^i \rangle = \mathbf{\Phi}(\mathbf{M}^i) \quad \mathbf{P}^i\text{-f. s.} \quad (i = 1, 2)\,. \tag{5.2.26}$$

Somit gilt für $i = 1, 2$

$$\int_0^t b^2(X_s^i)\,\mathrm{d}\langle M^i\rangle_s = \int_0^t b^2(X_s^i)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_s(\mathbf{M}^i) < +\infty\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}^i\text{-f. s.}$$

Hieraus folgt dann für $i = 1, 2$

$$\int_0^t b^2(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < +\infty\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}^i_{(\mathbf{X}^i,\mathbf{M}^i)}\text{-f. s.} \tag{5.2.27}$$

Wenn man beachtet, daß

$$\{\int_0^t b^2(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < +\infty\,,\ t \geq 0\}$$

eine $\mathcal{F}$-meßbare Menge ist, erhalten wir aus (5.2.27) unter Verwendung von (5.2.24) somit $(b(X_t))_{t\geq 0} \in \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbb{F})$. Damit ist über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ das stochastische Integral $\mathbf{I} = (I_t)_{t\geq 0}$ mit

$$I_t := \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s \quad \text{für} \quad t \geq 0 \tag{5.2.28}$$

wohldefiniert und liefert ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Es ist nun nicht schwierig zu zeigen, daß $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ eine Lösung von (5.2.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Da $(\mathbf{X}^i, \mathbf{M}^i)$ über $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i)$ eine Lösung von (5.2.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist, gilt zunächst für $i = 1, 2$

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b(X_s^i)\,\mathrm{d}M_s^i = X_0^i + I_t(\mathbf{X}^i, \mathbf{M}^i)\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}^i\text{-f. s.} \tag{5.2.29}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung folgt ganz analog der Argumentation zum Beweis der Gleichheit von (3.3.22) und (3.3.23) im Beweis von Satz 3.3.19. Mit (5.2.24) folgt dann aus (5.2.28), (5.2.29) und der Definition von $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{M}$

$$X_t = X_0 + I_t(\mathbf{X}, \mathbf{M}) = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.2.30}$$

Dabei hat man ebenfalls zu beachten, daß die Menge

$$\{X_t = X_0 + I_t(\mathbf{X}, \mathbf{M}) = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s\,,\ t \geq 0\}$$

zu $\mathcal{F}$ gehört. Also ist wegen (5.2.30) das Paar $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ eine Lösung von (5.2.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit $\mathbf{P}_{X_0} = \mu$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Deweiteren ist es nun mit (5.2.24), (5.2.25) und (5.2.26) nicht schwierig zu zeigen, daß $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ sogar eine Fundamentallösung von (5.2.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist.

Da nun $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}^{0,p}(C(\mathbb{R}_+))$ gilt, folgt aus Satz 5.2.19, daß $\mathbf{X}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{X},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Mit Satz 3.3.18 ist dann $\mathbf{P}_\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{loc}^{p}(C(\mathbb{R}_+))$. Somit besitzt der Koordinatenprozeß $\mathbf{Z}$ die $\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{P}_\mathbf{X}}$-Darstellbarkeitseigenschaft. Wegen

$$\mathbf{P}_\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\,\mathbf{P}^1_{\mathbf{X}^1} + \mathbf{P}^2_{\mathbf{X}^2})$$

auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ und $\mathbf{P}_{X_0} = \mathbf{P}_{X_0^1} = \mathbf{P}_{X_0^2} = \mu$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ erhalten wir mit Satz 3.3.3 die Gleichheit der Verteilung von $\mathbf{X}^1$ und $\mathbf{X}^2$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Dies war gerade zu zeigen. Mit der anfänglichen Vorbetrachtung erhalten wir dann auch die Gültigkeit von (5.2.23). Also ist die Fundamentallösung von (5.2.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ eindeutig in Verteilung, sofern $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}^{0,p}(C(\mathbb{R}_+))$. □

Damit können wir nun zum Hauptresultat dieses Kapitels kommen, welches notwendige und hinreichende Bedingungen dafür liefert, daß die Lösung von Gleichung (5.1.1) eindeutig in Verteilung ist. Entsprechend den vorhergehenden Betrachtungen wollen wir zunächst davon ausgehen, daß der treibende Prozeß von Gleichung (5.1.1) ein pures stetiges lokales Martingal ist. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.3 gilt nun insgesamt folgendes Resultat, wobei wir auch hier den trivialen Fall eines Martingalmaßes $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ mit $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty = 0\}) = 1$ ausschließen wollen.

Theorem 5.2.31 *Sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}^{0,p}(C(\mathbb{R}_+))$ *mit* $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty > 0\}) > 0$. *Dann gilt:*

(a) Für jede Startverteilung ist die Fundamentallösung von Gleichung (5.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *eindeutig in Verteilung.*

(b) Für jede Startverteilung existiert eine Lösung von (5.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$, *und die Lösung ist eindeutig in Verteilung genau dann, wenn*

$$E_b = N_b\,.$$

Beweis: Zum Beweis der Aussage (a) sei μ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Weiterhin seien $(\mathbf{X}^1, \mathbf{M}^1)$ und $(\mathbf{X}^2, \mathbf{M}^2)$ zwei Fundamentallösungen von (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung μ, welche über den entsprechenden Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \mathbf{P}^1)$ bzw. $(\Omega^2, \mathcal{F}^2, \mathbf{P}^2)$ mit Filtrationen $\mathbb{F}^1 = (\mathcal{F}_t^2)_{t\geq 0}$ bzw. $\mathbb{F}^2 = (\mathcal{F}_t^2)_{t\geq 0}$ definiert sind. Gemäß Satz 4.3.16 (i) ist für $i = 1, 2$ das Paar $(\mathbf{Y}^i, \mathbf{M}^i)$ mit $\mathbf{Y}^i := (G(X_t^i))_{t\geq 0}$ und $\mathbf{P}^i_{Y_0^i} = \mu \circ G^{-1}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ eine über $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i)$ definierte Fundamentallösung von

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \tilde{b}(Y_s)\,\mathrm{d}M_s \tag{5.2.32}$$

bzgl. $\mathbf{Q}$, wobei $\tilde{b}$ wie in Lemma 4.3.11 definiert ist. Aus Theorem 5.2.22 folgt dann, daß die Verteilungen von $\mathbf{Y}^1$ und $\mathbf{Y}^2$ auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ übereinstimmen. Da $\mathbf{X}^i = (H(Y_t^i))_{t\geq 0}$ für $i = 1, 2$ gilt und $H : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$-$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$-meßbare Abbildung ist, erhalten wir schließlich auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ die Gleichheit der Verteilungen

$$\mathbf{P}^1_{\mathbf{X}^1} = \mathbf{P}^2_{\mathbf{X}^2}\,.$$

Also ist für eine beliebige Startverteilung die Fundamentallösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ eindeutig in Verteilung.

Für den Beweis der Hinlänglichkeit von Aussage (b) nehmen wir an, daß die Bedingung $E_b = N_b$ erfüllt ist. Das Existenztheorem 4.3.31 garantiert zunächst die Existenz einer Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ für beliebige Startverteilungen. Aus der Bedingung $E_b = N_b$ folgt durch einfache Rechnung, daß jede Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ sogar eine Fundamentallösung ist. Mit der Aussage (a) folgt dann hieraus, daß für beliebige Startverteilungen eine in Verteilung eindeutige Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ existiert.

Bleibt uns also die Notwendigkeit der Bedingung $E_b = N_b$ zu zeigen. Nach Voraussetzung existiert für jede Startverteilung μ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ eine Lösung von (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$. Das Existenztheorem 4.3.31 liefert daher die Inklusion $E_b \subseteq N_b$. Somit genügt es zu zeigen, daß die umgekehrte Inklusion $N_b \subseteq E_b$ erfüllt ist. Dazu nehmen wir an, daß ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \in N_b \cap E_b^c$ existiert und zeigen, daß die Lösung von (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung δ_{x_0} nicht eindeutig in Verteilung ist.

Zunächst folgt wegen $E_b \subseteq N_b$ aus Theorem 4.3.31, daß zur Startverteilung δ_{x_0} eine Fundamentallösung $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ von (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ existiert. Wegen $x_0 \in N_b \cap E_b^c$ ist der Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ nicht trivial. Denn ist $\mathbf{X}$ trivial, so gilt $D_{E_b}^{\mathbf{X}} = +\infty$ f. s. sowie $\mathrm{I}_{N_b}(X_t) = 1$ für $t \geq 0$ f. s. Hieraus und aus der Bedingung an $\mathbf{Q}$ folgt dann, daß mit positiver Wahrscheinlichkeit gilt

$$\int_0^{D_{E_b}^{\mathbf{X}}} \mathrm{I}_{N_b}(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s = \langle M\rangle_\infty > 0\,.$$

Dies liefert uns aber, daß $\mathbf{X}$ zusammen mit $\mathbf{M}$ keine Fundamentallösung von (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Demzufolge ist unter der Bedingung $x_0 \in N_b \cap E_b^c$ der Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ nicht trivial.

Andererseits ist das Paar $(\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{M})$ mit $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$, wobei $\tilde{X}_t := x_0$ für $t \geq 0$, wegen $x_0 \in N_b$ ebenfalls eine Lösung von (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung δ_{x_0}. Nach Konstruktion ist $(\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{M})$ sogar eine triviale Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$. Hieraus folgt aber, daß die Verteilung von $\mathbf{X}$ nicht mit der Verteilung von $\tilde{\mathbf{X}}$ übereinstimmen kann, und somit liegt keine Eindeutigkeit in Verteilung vor. Also gilt notwendigerweise $N_b \cap E_b^c = \emptyset$. Mit der vorausgesetzten Existenz einer Lösung muß wegen $E_b \subseteq N_b$ dann $E_b = N_b$ gelten. Das war aber gerade zu zeigen. □

Bemerkung 5.2.33 (1) Bis auf die Bedingung $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}^{0,p}(C(\mathbb{R}_+))$ an das Martingalmaß zeigt das vorangegangene Theorem, daß wir die gleichen Eindeutigkeitskriterien für Lösungen von (5.1.1) haben, wie sie für den Fall der Brownschen Bewegung als treibender Prozeß formuliert wurden. Bemerkenswert ist auch hier wieder, daß die Bedingung in Aussage (b) von Theorem 5.2.31 rein analytischer Natur ist und der Nachweis dieser Bedingung in vielen Fällen relativ einfach ist.

(2) Betrachtet man den Beweis der Notwendigkeit von Aussage (b) des Theorems 5.2.31 genauer, so sieht man, daß bis auf Nichttrivialität keine weiteren Eigenschaften des treibenden Prozesses verwendet werden. Somit ist für ein beliebiges $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ mit $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty > 0\}) > 0$ die Bedingung $N_b \subseteq E_b$ notwendig aber nicht hinreichend für die Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung von (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$, vorausgesetzt es existiert eine Lösung.

(3) Darüber hinaus sei noch erwähnt, daß im Falle eines trivialen $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$, also $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty = 0\}) = 1$, die Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ eindeutig in Verteilung ist (vgl. hierzu die Ausführungen zum Schluß von Abschnitt 4.1).

Zum Abschluß wollen wir den Fall eines Martingalmaßes $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ betrachten, welches nicht pur ist. Im Beispiel 5.1.3 haben wir bereits gesehen, daß Eindeutigkeit in Verteilung der Fundamentallösung von (5.2.1) bzgl. $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ nicht immer gegeben ist, auch wenn $\mathbf{Q}$ gute Eigenschaften wie zum Beispiel die Darstellbarkeitseigenschaft besitzt. Darüber hinaus war dieses Beispiel so gewählt, daß die zu (5.2.1) assoziierte Gleichung keine starke Lösung besitzt. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist neben der Eindeutigkeit in der gemeinsamen Verteilung der Lösung der zu (5.1.1) assoziierten Gleichung auch die Existenz einer starken Lösung der zu (5.1.1) assoziierten Gleichung eine hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung von Gleichung (5.1.1).

Weiterhin läßt dieses Beispiel auch folgende Vermutung anstellen: Für ein $\mathbf{Q}$ aus $\mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ sei die Lösung $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ der zu (5.1.1) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$, falls diese existiert, so beschaffen, daß die gemeinsame Verteilung von $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{T}$ eindeutig ist, wobei $\mathbf{T}$ die Rechtsinverse von $\langle \mathbf{M} \rangle$ bezeichnet. Dann ist die Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ eindeutig in Verteilung. Das nun nachfolgende Beispiel bekräftigt diese Vermutung und ist gleichzeitig ein Beispiel dafür, daß Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ vorliegen kann, auch wenn $\mathbf{Q}$ nicht einmal die Darstellbarkeitseigenschaft besitzt.

Beispiel 5.2.34 Über $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)), \mathbb{W})$ betrachten wir den Koordinatenprozeß $\mathbf{Z} = (Z_t)_{t \geq 0}$. Darüber hinaus definieren wir über $C(\mathbb{R}_+)$ einen weiteren stochastischen Prozeß $\hat{\mathbf{Z}} = (\hat{Z}_t)_{t \geq 0}$ durch

$$\tilde{Z}_t := Z_{2t} \quad (t \geq 0)\,.$$

Mit $\tilde{\mathbb{W}}$ bezeichnen wir die Verteilung von $\tilde{\mathbf{Z}}$ bzgl. $\mathbb{W}$. Wie im Beispiel 1 in [15] ausgeführt, sind die beiden Martingalmaße $\mathbb{W}$ und $\tilde{\mathbb{W}}$ auf der σ-Algebra $\mathfrak{B}_{0+}(C(\mathbb{R}_+)) = \mathcal{F}^{\mathbf{Z}}_{0+}$ singulär. Somit existiert ein $C \in \mathfrak{B}_{0+}(C(\mathbb{R}_+))$, so daß $\mathbb{W}(C) = 1 - \tilde{\mathbb{W}}(C) = 1$ gilt.

Als nächstes definieren wir auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ ein Martingalmaß $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ durch

$$\mathbf{Q} := \frac{1}{2}(\mathbb{W} + \tilde{\mathbb{W}})\,.$$

Dann ist $\mathbf{Z}$ über der Vervollständigung von $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)), \mathbf{Q})$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{Z},\mathbf{Q}}_+, \mathbf{Q})$-Martingal mit quadratischem Variationsprozeß $\langle \mathbf{Z} \rangle = (\langle Z \rangle_t)_{t \geq 0}$ gegeben durch

$$\langle Z \rangle_t(\mathbf{w}) = \begin{cases} t & \text{für} \quad \mathbf{w} \in C\,, \\ 2t & \text{für} \quad \mathbf{w} \notin C \end{cases} \qquad (\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+))\,.$$

Des weiteren sieht man mit Hilfe von Satz 3.3.3 leicht, daß $\mathbf{Q}$ nicht die Darstellbarkeitseigenschaft besitzt.

Sei nun $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Borel-meßbare Funktion mit $E_b \subseteq N_b$. Gemäß Theorem 4.3.31 existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ in $\mathcal{F}$ sowie eine über diesem Wahrscheinlichkeitsraum definierte Fundamentallösung $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ von

$$X_t = \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s \tag{5.2.35}$$

bzgl. $\mathbf{Q}$. Dabei wollen wir annehmen, daß $\mathbf{X}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Wegen $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_{\mathbf{M}}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ besitzt das stetige lokale $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{M}$ nicht die

$\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft (vgl. Satz 3.3.19) und ist somit auch nicht pur. Für den quadratischen Variationsprozeß $\langle \mathbf{M} \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t\geq 0}$ von $\mathbf{M}$ erhalten wir mit Satz 3.1.6

$$\langle M \rangle_t = \begin{cases} t & \text{auf} \quad \{\mathbf{M} \in C\}\,, \\ 2t & \text{auf} \quad \{\mathbf{M} \notin C\}\,. \end{cases}$$

Für die Rechtsinverse $\mathbf{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ von $\langle \mathbf{M} \rangle$ gilt dann entsprechend

$$T_t = \begin{cases} t & \text{auf} \quad \{\mathbf{M} \in C\}\,, \\ \frac{t}{2} & \text{auf} \quad \{\mathbf{M} \notin C\}\,. \end{cases}$$

Ganz analog wie im Beweis von Satz 5.2.8 kann gezeigt werden, daß sich $\mathbf{M}$ mittels des stetigen lokalen $(\mathbb{F}^{\mathbf{P}},\, \mathbf{P})$-Martingals $\mathbf{X}$ darstellen läßt als

$$M_t = \int_0^t b^{-1}(X_s)\,\mathrm{d}X_s\,, \quad t \geq 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.2.36}$$

Dies folgt aus $E_b \subseteq N_b$ und da $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Fundamentallösung ist. Somit ist $\mathbf{M}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{X},\mathbf{P}},\, \mathbf{P})$-Martingal. Wegen $\{\mathbf{M} \in C\} \in \mathcal{F}_{0+}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$ und der Eigenschaft $\langle M \rangle_\infty = +\infty$ auf Ω ist dann $\mathbf{T}$ eine $\mathbb{F}_+^{\mathbf{X},\mathbf{P}}$-Zeittransformation mit Trajektorien in E_+ ist. Damit ist die zu $\mathbf{M}$ assoziierte Brownsche Bewegung $\mathbf{W}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{X},\mathbf{P}} \circ \mathbf{T},\, \mathbf{P})$-Martingal mit $\langle W \rangle_t = \langle M \rangle_{T_t} = t$ für $t \geq 0$ $\mathbf{P}$-f. s. Mit dem Charakterisierungssatz von P. Lévy (vgl. Satz 2.2.11) folgt dann, daß $\mathbf{W}$ sogar eine $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{X},\mathbf{P}} \circ \mathbf{T},\, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung ist. Wie man sich unter Beachtung von $\{\mathbf{M} \in C\} \in \mathcal{F}_{0+}^{\mathbf{X},\mathbf{P}}$ leicht überzeugt, ist $\{\mathbf{M} \in C\}$ und somit auch $\langle \mathbf{M} \rangle$ bzw. $\mathbf{T}$ unabhängig von der zu $\mathbf{M}$ assoziierten Brownschen Bewegung $\mathbf{W}$. In diesem Sinne ist $\mathbf{M}$ ein sogenanntes *Ocone-Martingal*.

Für den zeittransformierten Prozeß $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \circ \mathbf{T}$ erhalten wir ganz analog, daß $\mathbf{Y}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{X},\mathbf{P}} \circ \mathbf{T},\, \mathbf{P})$-Martingal ist. Mit Satz 4.4.25 ist dann $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ eine Fundamentallösung der zu (5.2.35) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ mit $Y_0 = 0$. Aus Satz 5.2.4 erhalten wir, daß $\mathbf{Y}$ ein pures stetiges lokales $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{X},\mathbf{P}} \circ \mathbf{T},\, \mathbf{P})$-Martingal ist, woraus mit dem zweiten Teil von Satz 3.3.3 die Unabhängigkeit der beiden σ-Algebren $\mathcal{F}_{0+}^{\mathbf{X},\mathbf{P}}$ und $\mathcal{F}_\infty^{\mathbf{Y},\mathbf{P}}$ folgt. Damit ist dann aber auch $\langle \mathbf{M} \rangle$ bzw. $\mathbf{T}$ unabhängig von $\mathbf{Y}$.

Für den Lösungsprozeß $\mathbf{X}$ erhalten wir unter Verwendung der Funktion φ aus (3.2.2) durch Rücktransformation von $\mathbf{Y}$ mittels $\langle \mathbf{M} \rangle$ die Darstellung

$$X_t = Y_{\langle M \rangle_t} = \varphi(\mathbf{Y}, \langle \mathbf{M} \rangle)(t) = \begin{cases} Y_t & \text{auf} \quad \{\mathbf{M} \in C\}\,, \\ Y_{2t} & \text{auf} \quad \{\mathbf{M} \notin C\}\,, \end{cases} \qquad t \geq 0\,.$$

Nun ist $\langle \mathbf{M} \rangle$ wegen

$$\langle M \rangle_t = \inf\{s \geq 0 \,:\, T_s > t\} \quad \text{für} \quad t \geq 0$$

ein wohlbestimmtes meßbares Funktional von $\mathbf{T}$. Somit ist $\mathbf{X}$ entsprechend der obigen Darstellung ebenfalls ein wohlbestimmtes meßbares Funktional von $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{T}$. Also wird die Verteilung von $\mathbf{X}$ eindeutig durch die gemeinsame Verteilung von $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{T}$ bestimmt. Wegen der Unabhängigkeit von $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{T}$ kann man nun leicht zeigen, daß auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(D_+)$ gilt

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{Y},\mathbf{T})} = \mathbf{P}_{\mathbf{Y}} \otimes \mathbf{P}_{\mathbf{T}} = \mathbf{P}_{\mathbf{Y}} \otimes (\frac{1}{2}(\delta_{\mathbf{a}_1} + \delta_{\mathbf{a}_2}))\,.$$

Dabei sind die Funktionen $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definiert durch $\mathbf{a}_1(t) = t$ und $\mathbf{a}_2(t) = \frac{t}{2}$ für $t \geq 0$. Da die Fundamentallösung der zu (5.2.35) assoziierten Gleichung bzgl. der Brownschen Bewegung als treibender Prozeß eindeutig in Verteilung ist, folgt dann hieraus, daß die

Verteilung des Paares $(\mathbf{Y}, \mathbf{T})$ eindeutig bestimmt ist. Somit ist dann auch die Verteilung von $\mathbf{X}$ eindeutig bestimmt. Zusammenfassend erhalten wir, daß unter der Bedingung $E_b \subseteq N_b$, die Fundamentallösung von (5.2.35) bzgl. $\mathbf{Q}$ eindeutig in Verteilung ist. Ganz analog kann man zeigen, daß die Lösung von (5.2.35) bzgl. $\mathbf{Q}$ eindeutig in Verteilung ist, falls $E_b = N_b$ gilt. $\square$

Bemerkung 5.2.37 Das vorhergehende Beispiel läßt nun auch folgende Vermutung anstellen: Ist $\mathbf{M}$ ein stetiges lokales Martingal, so daß die zu $\mathbf{M}$ assoziierte Brownsche Bewegung unabhängig von $\langle \mathbf{M} \rangle$ ist, d. h. $\mathbf{M}$ ist ein Ocone-Martingal, dann ist unter der Bedingung $E_b \subseteq N_b$ die Fundamentallösung von Gleichung (5.2.35) bzgl. $\mathbf{P_M}$ eindeutig in Verteilung. Dies ist im allgemeinen aber nicht der Fall, wie das Beispiel in [13] zeigt. Denn in diesem Beispiel ist $\mathbf{M}$ gerade so gewählt, daß $\mathbf{M}$ ein Ocone-Martingal ist.

Motiviert durch die beiden Beispiele 5.1.3 und 5.2.34, erhalten wir nun folgende weitere Eindeutigkeitsaussage für Lösungen von Gleichung (5.1.1).

Theorem 5.2.38 *Seien $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, so daß eine Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung μ existiert. Für die Lösung $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ der zu (5.1.1) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ gelte, daß die gemeinsame Verteilung von $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{T}$ eindeutig ist, wobei $\mathbf{T}$ die Rechtsinverse von $\langle \mathbf{M} \rangle$ bezeichnet. Dann ist die Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ eindeutig in Verteilung.*

Beweis: Für $i = 1, 2$ seien $(\mathbf{X}^i, \mathbf{M}^i)$ jeweils Lösungen von (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung μ. Diese seien über den entsprechenden Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i)$ mit Filtration $\mathbb{F}^i = (\mathcal{F}^i_t)_{t \geq 0}$ in $\mathcal{F}^i$ definiert. Nach Satz 4.4.25 ist dann $\mathbf{X}^i \circ \mathbf{T}^i$ für $i = 1, 2$ ununterscheidbar von einem Lösungsprozeß der zu (5.1.1) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung μ. Mit der Voraussetzung gilt dann

$$\mathbf{P}^1_{(\mathbf{X}^1 \circ \mathbf{T}^1, \mathbf{T}^1)} = \mathbf{P}^2_{(\mathbf{X}^2 \circ \mathbf{T}^2, \mathbf{T}^2)} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(D_+)\,. \tag{5.2.39}$$

Wie wir bereits wissen, ist $\mathbf{X}^i$ ein $\mathbf{P}^i$-f. s. $\mathbf{T}^i$-adaptierter Prozeß (vgl. Satz 4.4.16 (a)), woraus

$$\mathbf{X}^i = (\mathbf{X}^i \circ \mathbf{T}^i) \circ \langle \mathbf{M}^i \rangle = \varphi(\mathbf{X}^i \circ \mathbf{T}^i, \langle \mathbf{M}^i \rangle) \quad \mathbf{P}^i\text{-f. s.} \tag{5.2.40}$$

für $i = 1, 2$ folgt, wobei φ das meßbare Funktional aus Satz 3.2.3 ist. Des weiteren ist bekannt, daß der quadratische Variationsprozeß $\langle \mathbf{M}^i \rangle$ von $\mathbf{M}^i$ ein wohlbestimmtes meßbares Funktional von $\mathbf{T}^i$ ist, denn für $t \geq 0$ ist

$$\langle M^i \rangle_t = \inf\{s \geq 0 \,:\, T^i_s > t\} \quad (i = 1, 2)\,.$$

Hieraus und aus (5.2.40) zusammen mit (5.2.39) erhalten wir, daß auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ gilt

$$\mathbf{P}^1_{\mathbf{X}^1} = \mathbf{P}^2_{\mathbf{X}^2}\,.$$

Somit ist die Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ eindeutig in Verteilung. $\square$

Zum Abschluß wollen wir noch hinreichende Bedingungen dafür angeben, unter denen die Voraussetzung von Theorem 5.2.38 erfüllt ist.

Satz 5.2.41 *Seien $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, so daß eine Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung μ existiert. Dann ist die Lösung von Gleichung (5.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung μ eindeutig in Verteilung, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(a) *Die Lösung der zu* (5.1.1) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit Startverteilung* μ *ist eindeutig in Verteilung, und es existiert eine* $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$*-*$\mathfrak{B}(D_+)$*-meßbare Abbildung* $\mathbf{F} : \overline{C}(\mathbb{R}_+) \to D_+$*, so daß*

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}) \quad \textit{f. s.}$$

für jede Lösung $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ *der zu* (5.1.1) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit Startverteilung* μ *gilt.*

(b) *Die Lösung der zu* (5.1.1) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit Startverteilung* μ *ist eindeutig in Verteilung, und für jede Lösung* $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ *der zu* (5.1.1) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit Startverteilung* μ *sind die Prozesse* $\mathbf{T}$ *und* $\mathbf{Y}$ *stochastisch unabhängig.*

Beweis: Auf den einfachen Beweis dieser Aussage verzichten wir, da unter den angegebenen Bedingungen stets die Eindeutigkeit der gemeinsamen Verteilung von $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{T}$ folgt. Bei (b) hat man nur zu beachten, daß $\mathbf{T}$ ein wohlbestimmtes meßbares Funktional von $\mathbf{M}$ ist. Damit wird die Verteilung von $\mathbf{T}$ vollständig durch die Verteilung von $\mathbf{M}$ bzw. durch $\mathbf{Q}$ beschrieben. □

Bemerkung 5.2.42 Eine hinreichende Bedingung dafür, daß für ein $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ die Lösung der zu (5.1.1) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ eindeutig in Verteilung ist, ist die Bedingung $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{a,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und $E_b = N_b$ (Vgl. Theorem 5.2.31).

5.3 Pfadweise Eindeutigkeit und starke Lösungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der pfadweisen Eindeutigkeit sowie der Existenz starker Lösungen der stochastischen Differentialgleichung (5.1.1) beschäftigen. Zunächst soll aber der Begriff der pfadweisen Eindeutigkeit präzisiert werden:

Definition 5.3.1 *Es sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$. *Die Lösung (bzw. Fundamentallösung) von* (5.1.1) *heißt pfadweise eindeutig, falls für je zwei Lösungen (bzw. Fundamentallösungen)* $(\mathbf{X}^1, \mathbf{M})$ *und* $(\mathbf{X}^2, \mathbf{M})$ *von* (5.1.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *definiert über ein und demselben Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *mit ein und demselben treibenden Prozeß* $\mathbf{M}$ *aus* $X_0^1 = X_0^2$ $\mathbf{P}$*-f. s. folgt* $\mathbf{P}(\{X_t^1 = X_t^2,\ t \geq 0\}) = 1$.

Im folgenden wollen wir speziell die Gleichung

$$X_t = x_0 + \int_{\mathbb{R}} L^{\mathbf{X}}(t,a)\,\nu(\mathrm{d}a) + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}M_s \tag{5.3.2}$$

mit einem deterministischen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachten, d. h., für ein gegebenes $x_0 \in \mathbb{R}$ besitzt jeder Lösungsprozeß von (5.3.2) die Startverteilung δ_{x_0}. Im Falle der Brownschen Bewegung als treibenden Prozeß, also $\mathbf{M} = \mathbf{B}$ mit einer Brownschen Bewegung $\mathbf{B} = (B_t)_{t \geq 0}$ bzw. mit $\mathbf{Q} = \mathbb{W}$, besagt ein wohlbekanntes Theorem von T. Yamada und S. Watanabe (vgl. Theorem IV.1.1 in [24]), daß die Existenz und pfadweise Eindeutigkeit der Lösung von (5.3.2) die Existenz einer starken und in Verteilung eindeutiger Lösung von (5.3.2) impliziert. Dies ist somit ein nützliches Instrument, um zu zeigen, daß eine stochastische Differentialgleichung bzgl. der Brownschen Bewegung starke Lösungen besitzt. Für den Beweis dieses Resultats wird die Tatsache verwendet, daß eine $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung $\mathbf{B}$ unabhängig von der σ-Algebra $\mathcal{F}_{0+}$ ist. Dies muß bei einem beliebigen stetigen lokalen Martingal nicht immer der Fall sein (vgl. z. B. die letzte Aussage von Satz 3.3.3). Daher wollen wir, wie bereits erwähnt, deterministische Anfangswerte für Lösungen von Gleichung (5.3.2) annehmen.

Jacod ([26]) bzw. Jacod und Memin ([27]) beschäftigten sich ebenfalls mit der Frage der pfadweisen Eindeutigkeit sowie Existenz starker Lösungen stochastischer Differentialgleichungen mit einem rechtsstetigen Semimartingal als treibender Prozeß. Speziell betrachteten sie die Gleichung von Doléans-Dade und Protter, also Gleichungen der Gestalt

$$X_t = K_t + \int_0^t g_s(\,.\,, X_.(.))\,\mathrm{d}Z_s\,, \tag{5.3.3}$$

wobei $\mathbf{Z} = (Z_t)_{t\geq 0}$ ein im Nullpunkt startendes Semimartingal bezeichnet, g ein vorhersagbarer Prozeß ist, welcher vom Pfad des Lösungsprozesses $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ abhängt, und $\mathbf{K} = (K_t)_{t\geq 0}$ einen stochastischen Prozeß kennzeichnet, der die Rolle der Anfangsbedingung spielt. Für diese Gleichung untersuchten sie die Frage der Existenz starker Lösungen und den Zusammenhang zur pfadweisen Eindeutigkeit. Dazu betrachteten sie sogenannte „gute“ bzw. „sehr gute“ Lösungen bzw. Lösungsmaße. Was dies bedeutet, soll im folgenden für unseren Typ von stochastischen Differentialgleichungen dargestellt werden. Hinsichtlich des Begriffs des Lösungsmaßes sei an dieser Stelle auch auf die Ausführungen in [11] verwiesen.

Für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ sei $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ definiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$. Die Verteilung des Paares $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ bzw. das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{M})}$ auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ bezeichnet man auch als *gemeinsames Lösungsmaß* von Gleichung (5.3.2) bzw. von (5.1.1), falls dieser Typ von Gleichung betrachtet wird (vgl. hierzu [11] und [26]). Da der Bildbereich des Lösungsprozesses $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ der polnische Raum $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ versehen mit der σ-Algebra $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ ist, existiert bekanntlich eine reguläre bedingte Verteilung von $\mathbf{X}$ unter der Hypothese $\mathbf{M}$. Im Detail heißt dies, es existiert ein $\mathbf{Q}$-f. s. eindeutig bestimmter Markov-Kern

$$q : C(\mathbb{R}_+) \times \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \to [0,1]\,,$$

so daß für $C \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ und $\mathbf{Q}$-fast alle $\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)$ gilt

$$q(\mathbf{w}, C) = \mathbf{P}(\{\mathbf{X} \in C\} \mid \mathbf{M} = \mathbf{w})\,. \tag{5.3.4}$$

Insbesondere gilt für $C \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ und $D \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{M})}(C \times D) = \int_D q(\mathbf{w}, C)\ \mathbf{Q}(\mathrm{d}\mathbf{w})\,. \tag{5.3.5}$$

Im Falle, daß $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ eine $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung ist, also es gilt $\mathbf{Q} = \mathbb{W}$, besitzt der Kern q die folgende Eigenschaft (vgl. Lemma IV.1.1 in [24]):

$$q(\,\cdot\,, C) \text{ ist } \overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\,\mathbf{Q}}\text{-meßbar für jedes } C \in \mathfrak{B}_t(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \text{ und } t \geq 0\,. \tag{5.3.6}$$

Diese Eigenschaft des Kernes ist dann maßgebend für den Beweis des Satzes von Yamada und Watanabe und resultiert im wesentlichen aus der Darstellbarkeitseigenschaft der Brownschen Bewegung, wie wir später sehen werden.

Für ein beliebiges stetiges lokales Martingal $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ muß für den Kern q die Meßbarkeit (5.3.6) im allgemeinen nicht erfüllt sein (vgl. Satz 5.3.18). Dagegen besitzt der Kern q diese Meßbarkeitseigenschaft, wenn $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine starke Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. In diesem Fall ist $\mathbf{X}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$ adaptiert. Somit existiert ein $(\overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}})_{t\geq 0}$-adaptiertes Funktional $\mathbf{F} : C(\mathbb{R}_+) \to \overline{C}(\mathbb{R}_+)$ mit der Eigenschaft $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{M})$ $\mathbf{P}$-f. s. Für einen Beweis vergleiche man beispielsweise Lemma 1.13 und Lemma 1.25 in [29] sowie Theorem 2.1 (i) in [3], welches simultan auch für stetige lokale Martingale bewiesen werden kann. Hieraus folgt dann aber

(5.3.7) $$q(\,\cdot\,, C) = \delta_{\mathbf{F}(.)}(C)\,, \quad C \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))\,, \quad \mathbf{Q}\text{-f. s.}$$

Somit erfüllt $q(\,\cdot\,, C)$ die Bedingung (5.3.6).

Besitzt umgekehrt der Kern q die Gestalt (5.3.7) mit einem $(\overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}})_{t\geq 0}$-adaptieren Funktional $\mathbf{F} : C(\mathbb{R}_+) \to \overline{C}(\mathbb{R}_+)$, so ist auch $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine starke Lösung. In diesem Fall gilt nämlich $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{M})$ $\mathbf{P}$-f. s., woraus dann die $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Adaptiertheit des Lösungsprozesses $\mathbf{X}$ folgt.

Die Eigenschaft (5.3.6) des Kernes q wird in der Arbeit von Jacod und Memin dazu verwandt, um den Begriff einer „sehr guten“ Lösung einzuführen (vgl. Definition 1.7 zusammen mit Korollar 2.20 in [27]). Dort definiert man, die Lösung bzw. das gemeinsame Lösungsmaß der Lösung von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist „sehr gut“, falls der Kern q aus (5.3.4) die Meßbarkeitseigenschaft (5.3.6) erfüllt. Hierfür wollen wir folgende Notation bzw. Klasse von Lösungen einführen: Seien $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnet $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ die Menge aller Lösungen von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$, deren gemeinsames Lösungsmaß die Darstellung (5.3.5) mit einen vom Lösungsprozeß abhängigen Markov-Kern q von $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ nach $(\overline{C}(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ besitzt, so daß q die Meßbarkeitsbedingung (5.3.6) erfüllt. Damit können wir zunächst folgenden Satz beweisen, welcher eine Vorstufe des Theorems von Yamada und Watanabe für die betrachtete Gleichung (5.3.2) darstellt.

Satz 5.3.8 *Seien $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann folgt aus der pfadweisen Eindeutigkeit der Lösung in der Klasse $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$:*

(i) Die Lösung aus $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ ist eindeutig in der gemeinsamen Verteilung und insbesondere eindeutig in Verteilung.

(ii) Gilt darüber hinaus $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0) \neq \emptyset$, dann existiert eine $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-meßbare Abbildung $\mathbf{\Phi} : C(\mathbb{R}_+) \to \overline{C}(\mathbb{R}_+)$, welche $(\overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}})_{t\geq 0}$-adaptiert ist, so daß für jede Lösung $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ aus $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ gilt

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{M}) \quad \textit{f. s.}\,,$$

d. h., im Falle $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0) \neq \emptyset$ ist jede Lösung aus der Klasse $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ eine starke Lösung.

Beweis: Der Beweis der ersten Aussage dieses Satzes verläuft ganz analog wie im Fall der Brownschen Bewegung als treibender Prozeß, also $\mathbf{Q} = \mathbb{W}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$. Für Gleichungen vom Typ (5.3.3) vergleiche man auch den Beweis von Theorem 8.3 in [26] bzw. Theorem 2.25 in [27].

Seien also $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $i = 1, 2$ sei $(\mathbf{X}^i, \mathbf{M}^i)$ eine Lösung aus $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$, welche über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i)$ mit Filtration $\mathbb{F}^i = (\mathcal{F}^i_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}^i$ definiert ist. Weiterhin bezeichnet q^i für $i = 1, 2$ den Markov-Kern aus (5.3.4) bzw. (5.3.5) der Lösung $(\mathbf{X}^i, \mathbf{M}^i)$, so daß (5.3.6) für q^i gilt. Damit definieren wir folgenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$:

$$\begin{aligned}\Omega &:= C(\mathbb{R}_+) \times \overline{C}(\mathbb{R}_+) \times \overline{C}(\mathbb{R}_+)\,,\\ \mathcal{F}^o &:= \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))\,,\\ \mathbf{P}(\Gamma) &:= \int\limits_\Gamma q^1(\mathbf{w},\,\mathrm{d}\mathbf{x}_1)\, q^2(\mathbf{w},\,\mathrm{d}\mathbf{x}_2)\; \mathbf{Q}(\mathrm{d}\mathbf{w}) \quad (\Gamma \in \mathcal{F}^o)\,,\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{F}$ die Vervollständigung von $\mathcal{F}^o$ bzgl. $\mathbf{P}$ bezeichnet. Weiterhin betrachten wir für $i = 1, 2$ die über Ω definierten stochastischen Prozesse $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ und $\mathbf{Y}^i = (Y_t^i)_{t\geq 0}$ mit

$$M_t(\mathbf{w}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \mathbf{w}(t) \quad \text{und} \quad Y_t^i(\mathbf{w}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \mathbf{x}_i(t)$$

für $t \geq 0$ und $(\mathbf{w}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \Omega$. Mit $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t^{(\mathbf{M},\mathbf{Y}^1,\mathbf{Y}^2),\mathbf{P}})_{t\geq 0}$ bezeichnen wir die von den Prozessen $\mathbf{M}, \mathbf{Y}^1$ und $\mathbf{Y}^2$ erzeugte kanonische und augmentierte Filtration.

Man kann nun leicht zeigen, daß $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $\mathbb{F}$ eine Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraumes $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)), \mathbf{Q})$ mit Filtration $(\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+)))_{t\geq 0}$ ist. Dazu hat man nur zu beachten, daß das Produkt $q^1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\, q^2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ der beiden Markov-Kerne q^1, q^2 wieder ein Markov-Kern von $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ nach $(\overline{C}(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)))$ ist, welcher die Meßbarkeitseigenschaft (5.3.6) erfüllt. Mit Satz 3.1.14 (vgl. auch Proposition 10.46 in [25]) ist dann $\mathbf{M}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal mit $\mathbf{P}_\mathbf{M} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$.

Für die gemeinsame Verteilung von $\mathbf{Y}^i$ und $\mathbf{M}$ gilt dann auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ die Beziehung

$$\text{(5.3.9)} \qquad \mathbf{P}_{(\mathbf{Y}^i,\mathbf{M})} = \mathbf{P}^i_{(\mathbf{X}^i,\mathbf{M}^i)} \quad (i = 1, 2)\,.$$

Insbesondere ist $\mathbf{P}_{Y_0^i} = \delta_{x_0}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ für $i = 1, 2$. Aus (5.3.9) erhalten wir für $\mathbf{Y}^i$ aufgrund der Eigenschaften von $\mathbf{X}^i$ zunächst die Beziehung $\mathbf{Y}^{i\,S_\infty^{\mathbf{Y}^i}} = \mathbf{Y}^i$ $\mathbf{P}^i$-f. s. sowie $Y_0^i \in \mathbb{R}$ $\mathbf{P}^i$-f. s. Also ist $\mathbf{Y}^i$ im Sinne unserer Definition noch kein Lösungsprozeß von Gleichung (5.3.2). Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Theorem 5.2.22 oder Satz 3.3.19 (vgl. auch Proposition 10.46 in [25]) erhalten wir mit (5.3.9) unter Verwendung der Stoppzeiten aus (4.1.2), daß $\mathbf{Y}^i$ ununterscheidbar von einem $\mathbb{F}^\mathbf{P}$-adaptierten stochastischen Prozeß $\hat{\mathbf{Y}}^i$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ist, so daß $(\hat{\mathbf{Y}}^i, \mathbf{M})$ eine Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Mit (5.3.9) gilt dann für $i = 1, 2$

$$\mathbf{P}_{(\hat{\mathbf{Y}}^i,\mathbf{M})} = \mathbf{P}_{(\mathbf{Y}^i,\mathbf{M})} = \mathbf{P}^i_{(\mathbf{X}^i,\mathbf{M}^i)} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))\,.$$

Hieraus und aus der Eigenschaft der Markov-Kerne q^1 bzw. q^2 folgt dann, daß die beiden Lösungen $(\hat{\mathbf{Y}}^1, \mathbf{M})$ und $(\hat{\mathbf{Y}}^2, \mathbf{M})$ zu $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ gehören. Wegen $\hat{Y}_0^1 = x_0 = \hat{Y}_0^2$ $\mathbf{P}$-f.s. und der vorausgesetzten pfadweisen Eindeutigkeit der Lösungen aus $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ erhalten wir hieraus schließlich

$$\mathbf{Y}^1 = \hat{\mathbf{Y}}^1 = \hat{\mathbf{Y}}^2 = \mathbf{Y}^2 \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Unter Verwendung von (5.3.9) folgt dann aber hiermit, daß auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ gilt

$$\text{(5.3.10)} \qquad \mathbf{P}^1_{(\mathbf{X}^1,\mathbf{M}^1)} = \mathbf{P}_{(\mathbf{Y}^1,\mathbf{M})} = \mathbf{P}_{(\mathbf{Y}^2,\mathbf{M})} = \mathbf{P}^2_{(\mathbf{X}^2,\mathbf{M}^2)}\,.$$

Damit haben wir gezeigt, daß die gemeinsame Verteilung der zu $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ gehörigen Lösungen eindeutig bestimmt ist. Insbesondere liefert dies die Eindeutigkeit in Verteilung jeder zu $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ gehörigen Lösung, womit die Aussage (i) des Satzes bewiesen ist.

Als nächstes wollen wir den zweiten Teil des Satzes beweisen. Wegen $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0) \neq \emptyset$ sei $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{M}})$ eine beliebige zu $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ gehörige Lösung, welche über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ in $\tilde{\mathcal{F}}$ definiert ist. Mit $\tilde{q}$ bezeichnen wir den Markov-Kern aus (5.3.4) bzw. (5.3.5), so daß dieser die Eigenschaft (5.3.6) besitzt. Indem man in den vorherigen Ausführungen die beiden Paare $(\mathbf{X}^1, \mathbf{M}^1)$ bzw. $(\mathbf{X}^2, \mathbf{M}^2)$ durch das Paar $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{M}})$ und die Markov-Kerne q^1 bzw. q^2 durch $\tilde{q}$ ersetzt, so kann man auf ganz analoge Weise zwei zu $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ gehörende Lösungen $(\mathbf{Y}^1, \mathbf{M})$ und $(\mathbf{Y}^2, \mathbf{M})$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit der Eigenschaft

$$\tilde{\mathbf{P}}_{(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{M}})} = \mathbf{P}_{(\mathbf{Y}^1,\mathbf{M})} = \mathbf{P}_{(\mathbf{Y}^2,\mathbf{M})} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$$

konstruieren. Wegen der vorausgesetzten pfadweisen Eindeutigkeit von Lösungen aus der Klasse $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ gilt $\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}^2$ $\mathbf{P}$-f. s. Hieraus erhalten wir

$$1 = \mathbf{P}(\{\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}^2\}) = \mathbf{P}(C(\mathbb{R}_+) \times D) = \int\limits_{C(\mathbb{R}_+)} \tilde{q}(\mathbf{w}, \cdot\,) \otimes \tilde{q}(\mathbf{w}, \cdot\,)(D)\; \mathbf{Q}(\mathrm{d}\mathbf{w})\,,$$

wobei $D := \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \overline{C}(\mathbb{R}_+) \times \overline{C}(\mathbb{R}_+) \;:\; \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2\} \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ die Diagonale in $\overline{C}(\mathbb{R}_+) \times \overline{C}(\mathbb{R}_+)$ bezeichnet. Da der Markov-Kern $\tilde{q}$ Werte aus $[0, 1]$ annimmt, existiert somit eine $\mathbf{Q}$-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$, so daß

$$1 = \tilde{q}(\mathbf{w}, \cdot\,) \otimes \tilde{q}(\mathbf{w}, \cdot\,)(D)$$

für alle $\mathbf{w} \in N^c$ ist. Damit gilt dann für alle $\mathbf{w} \in N^c$ sowie $C \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$

$$\tilde{q}(\mathbf{w}, C) = \tilde{q}(\mathbf{w}, C)\, \tilde{q}(\mathbf{w}, \overline{C}(\mathbb{R}_+)) = \tilde{q}(\mathbf{w}, \cdot\,) \otimes \tilde{q}(\mathbf{w}, \cdot\,)(C \times C \cap D) = (\tilde{q}(\mathbf{w}, C))^2\,.$$

Hieraus folgt nun $\tilde{q}(\mathbf{w}, C) \in \{0, 1\}$ für $C \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ und $\mathbf{w} \in N^c$. Das bedeutet aber, daß für $\mathbf{Q}$-f. a. $\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)$ das Maß $\tilde{q}(\mathbf{w}, \cdot\,)$ ein Dirac-Maß auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ sein muß. Somit existiert zu jedem $\mathbf{w} \in N^c$ genau ein $\phi(\mathbf{w}) \in \overline{C}(\mathbb{R}_+)$, so daß auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ gilt

$$\tilde{q}(\mathbf{w}, \cdot\,) = \delta_{\phi(\mathbf{w})}(\cdot)\,.$$

(vgl. auch Lemma 19.17 in [41])

Wir definieren nun folgende Abbildung $\mathbf{\Phi} : C(\mathbb{R}_+) \to \overline{C}(\mathbb{R}_+)$ durch

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{w}) := \begin{cases} \phi(\mathbf{w}) & \text{für} \quad \mathbf{w} \in N^c\,, \\ \mathbf{0} & \text{für} \quad \mathbf{w} \in N\,. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{0}$ das Nullelement in $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$. Für $\mathbf{Q}$-f. a. $\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)$ gilt dann auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$

$$\tilde{q}(\mathbf{w}, \cdot\,) = \delta_{\phi(\mathbf{w})}(\cdot) = \delta_{\mathbf{\Phi}(\mathbf{w})}(\cdot)\,. \tag{5.3.11}$$

Nach Konstruktion ist $\mathbf{\Phi}$ eine $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$-meßbare Abbildung. Dies folgt aus der $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-Meßbarkeit von $\tilde{q}(\,\cdot\,, A)$ für jedes $A \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ und da $N \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ gilt. Des weiteren ist $\mathbf{\Phi}$ auch $(\overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}})_{t\geq 0}$-adaptiert. Denn für ein beliebiges $t \geq 0$ und $A \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist mit (5.3.6)

$$\{\mathbf{\Phi}_t \in A\} = (\{\tilde{q}(\,\cdot\,, A_t) = 1\} \cap N^c) \cup (\{\mathrm{I}_{A_t}(\mathbf{\Phi}) = 1\} \cap N) \in \overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}},$$

wobei $A_t := \{\mathbf{x} \in \overline{C}(\mathbb{R}_+) \,:\, \mathbf{x}(t) \in A\} \in \mathfrak{B}_t(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$. Setzt man

$$\tilde{D} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \in \overline{C}(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+) \,:\, \mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{w})\} \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))\,,$$

so gilt dann für die Lösung $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{M}})$ unter Verwendung von (5.3.5) sowie (5.3.11)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}(\{\tilde{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\Phi}(\tilde{\mathbf{M}})\}) &= \int\limits_{\tilde{D}} \tilde{q}(\mathbf{w}, \,\mathrm{d}\mathbf{x})\; \mathbf{Q}(\mathrm{d}\mathbf{w}) \\ &= \int\limits_{C(\mathbb{R}_+)} \delta_{\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{w})}(\{\mathbf{x} \in \overline{C}(\mathbb{R}_+) \,:\, (\mathbf{x}, \mathbf{w}) \in \tilde{D}\})\; \mathbf{Q}(\mathrm{d}\mathbf{w}) \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Also ist $\tilde{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\Phi}(\tilde{\mathbf{M}})$ $\tilde{\mathbf{P}}$-f. s. Aus der $(\overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}})_{t\geq 0}$-Adaptiertheit von $\boldsymbol{\Phi}$ folgt dann aber, daß der Lösungsprozeß $\tilde{\mathbf{X}}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{P}}}$ adaptiert ist. Somit ist $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{M}})$ eine starke Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit Startverteilung δ_{x_0}. Damit haben wir die Richtigkeit der Aussage (ii) des Satzes bewiesen. □

Bemerkung 5.3.12 Für ein beliebiges $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ besagt die Aussage (i) des vorangegangenen Satzes somit, daß es in der Klasse $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0) \neq \emptyset$ genau ein gemeinsames Lösungsmaß gibt, sofern die pfadweise Eindeutigkeit gilt.

Umgekehrt gilt nun aber auch (vgl. [4]):

Satz 5.3.13 *Es seien* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *und* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Weiterhin betrachten wir die Bedingungen:*

(a) Es existiert eine starke Lösung von Gleichung (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *und die Lösung von* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *ist eindeutig in der gemeinsamen Verteilung.*

(b) Es existiert eine Lösung von Gleichung (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *und die Lösung von* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *ist pfadweise eindeutig.*

Dann gilt die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$. *In diesem Fall ist jede Lösung von Gleichung* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *eine starke Lösung.*

Bemerkung 5.3.14 Betrachtet man nur Lösungen aus $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$, so gilt mit Satz 5.3.8 sogar die umgekehrte Implikation in Satz 5.3.13.

Beweis von Satz 5.3.13: Für den Beweis dieser Aussage vergleiche man den Beweis von Theorem 2 in [11] bzw. Theorem 8.3 in [25].

Die Existenz einer Lösung von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist gemäß der gemachten Voraussetzung in (a) klar. Es bleibt somit noch zu zeigen, daß die Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ pfadweise eindeutig ist. Dazu betrachten wir zwei Lösungen $(\mathbf{X}^1, \mathbf{M})$ und $(\mathbf{X}^2, \mathbf{M})$ von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$, die über ein und demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ definiert sind. Es ist nun zu zeigen, daß aus $X_0^1 = x_0 = X_0^2$ $\mathbf{P}$-f. s. folgt

$$\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^2 \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Laut Voraussetzung existiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ in $\tilde{\mathcal{F}}$ eine starke Lösung $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{M}})$ von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$.

Nach Definition ist der Lösungsprozeß $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{M}},\tilde{\mathbf{P}}}$ adaptiert. Analog dem Beweis von Theorem 2.1 in [3] existiert eine $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$-meßbare Abbildung

$$\mathbf{\Psi} \,:\, C(\mathbb{R}_+) \to \overline{C}(\mathbb{R}_+)\,,$$

welche $(\overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}})_{t\geq 0}$-adaptiert ist, so daß gilt

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{\Psi}(\tilde{\mathbf{M}}) \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.}$$

Insbesondere ist $\mathbf{\Psi}$ hierdurch $\mathbf{Q}$-f. s. eindeutig bestimmt.

Über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ betrachten wir den Prozeß

$$\mathbf{X} := \mathbf{\Psi}(\mathbf{M})\,.$$

Auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ erhalten wir dann die Beziehung

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{M})} \,=\, \mathbf{P}_{(\mathbf{\Psi}(\mathbf{M}),\mathbf{M})} \,=\, \tilde{\mathbf{P}}_{(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{M}})}\,. \tag{5.3.15}$$

Da der Bildraum von $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ der polnische Raum $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ ist, gilt für die bedingte Verteilung von $\mathbf{X}$ unter der Bedingung $\mathbf{M}$ für jedes $C \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$

$$\mathbf{P}(\{\mathbf{X} \in C\} \,|\, \mathbf{M}) = \delta_{\mathbf{\Psi}(\mathbf{M})}(C) \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.3.16}$$

Wie im Beweis Satz 5.3.8 schließt man aus (5.3.15), daß $\mathbf{X}$ ununterscheidbar von einem Lösungsprozeß von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Aus der Eindeutigkeit in der gemeinsamen Verteilung der Lösung von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ folgt dann hiermit und mit (5.3.15), daß für $i = 1, 2$ die Verteilung des Paares $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ mit der Verteilung von $(\mathbf{X}^i, \mathbf{M})$ über $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ übereinstimmt. Daraus folgt aber unter Verwendung von (5.3.16)

$$\mathbf{X}^i = \mathbf{\Psi}(\mathbf{M}) \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \quad (i = 1, 2)\,.$$

Dies liefert uns schließlich $\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^2$ $\mathbf{P}$-f. s., also die pfadweise Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$.

Es ist nun noch der zweite Teil des Satzes zu beweisen. Dazu sei $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{M}})$ eine weitere über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\hat{\mathbb{F}} = (\hat{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ in $\hat{\mathcal{F}}$ definierte Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$. Über $\hat{\Omega}$ sei

$$\mathbf{X}^* := \mathbf{\Psi}(\hat{\mathbf{M}})\,.$$

Dann gilt

$$\hat{\mathbf{P}}_{(\mathbf{X}^*,\hat{\mathbf{M}})} \,=\, \hat{\mathbf{P}}_{(\mathbf{\Psi}(\hat{\mathbf{M}}),\hat{\mathbf{M}})} \,=\, \mathbf{P}_{(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{M}})}$$

auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ und $X_0^* = x_0$ $\hat{\mathbf{P}}$-f. s. Hieraus folgt dann aber wiederum, daß $\mathbf{X}^*$ ununterscheidbar von einem Lösungsprozeß von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Mit der pfadweisen Eindeutigkeit der Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ erhalten wir schließlich

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^* = \mathbf{\Psi}(\hat{\mathbf{M}}) \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-f. s.}$$

Die $(\overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}})_{t\geq 0}$-Adaptiertheit von $\mathbf{\Psi}$ liefert dann aber, daß $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{M}})$ eine starke Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. □

Der Beweis des vorhergehenden Satzes liefert nun folgende Charakterisierung der Lösung von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$.

Satz 5.3.17 *Seien* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *und* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Weiterhin existiere eine starke Lösung von* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *und die Lösung von* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *ist pfadweise eindeutig. Dann existiert eine* $\mathbf{Q}$*-f. s. eindeutig bestimmte* $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$*-meßbare Abbildung*

$$\mathbf{\Psi} : C(\mathbb{R}_+) \to \overline{C}(\mathbb{R}_+) \,,$$

welche $(\overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}})_{t\geq 0}$*-adaptiert ist, so daß für jede über einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *definierte Lösung* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *von* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *gilt*

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{M}) \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Also ist $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *eine starke Lösung von* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$.

Beweis: Der Beweis dieses Satzes verläuft ganz analog wie der Beweis des zweiten Teils von Satz Satz 5.3.13, wobei man auch wieder mit einer starken Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ starten muß. □

Als nächstes wollen wir eine hinreichende Bedingung dafür angeben, wann für ein $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ jede Lösung von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ zu $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ gehört. Unter Verwendung des Existenztheorems 4.3.31 folgt dann aus der Gültigkeit dieser Bedingung dann insbesondere $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0) \neq \emptyset$ (vgl. Proposition 5.6 in [26] sowie Lemma 2.17 bzw. Korollar 2.20 in [27]). Der nun folgende Satz gibt zunächst eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, wann eine Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ überhaupt zu $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ gehört.

Satz 5.3.18 *Es seien* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *eine Lösung von Gleichung* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$, *welche über einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *mit Filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *in* $\mathcal{F}$ *definiert ist. Weiterhin sei* $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$ *rechtsstetig. Dann ist* $(\mathbf{X}, \mathbf{M}) \in \mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ *genau dann, wenn jedes* $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$*-Martingal auch ein* $(\mathbb{F}^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\mathbf{P}}, \mathbf{P})$*-Martingal ist.*

Beweis: Für einen Beweis dieser Aussage vergleiche man beispielsweise den Beweis von Proposition 5.6 in [26] bzw. Lemma 2.17 in [27].

Zum Beweis der Hinlänglichkeit sei $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ definiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$. Entsprechend den Ausführungen zu Beginn dieses Abschnitts existiert ein Markov-Kern q von $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ nach $(\overline{C}(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)))$, so daß (5.3.4) sowie (5.3.5) gilt. Unter der Annahme, daß jedes $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal auch ein $(\mathbb{F}^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist, ist nun $(\mathbf{X}, \mathbf{M}) \in \mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ zu zeigen. Hierfür ist zu zeigen, daß der Markov-Kern q die Meßbarkeitsbedingung (5.3.6) erfüllt.

Für ein festes aber beliebig gewähltes $t \geq 0$ betrachten wir zunächst den gestoppten Prozeß $\mathbf{M}^t = (M_{s\wedge t})_{s\geq 0}$. Dann existiert wiederum ein Markov-Kern q_t von $(C(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+)))$ nach $(\overline{C}(\mathbb{R}_+), \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)))$, so daß für jedes $C \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ gilt

$$q_t(\mathbf{w}, C) = \mathbf{P}(\{\mathbf{X} \in C\} \,|\, \mathbf{M}^t = \mathbf{w}) \quad \text{für} \quad \mathbf{P}_{\mathbf{M}^t}\text{-f. a.} \quad \mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+) \,.$$

Für alle $C \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ und $D \in \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$ ist dann

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{M}^t)}(C \times D) = \int_D q_t(\mathbf{w}, C) \; \mathbf{Q}(\mathrm{d}\mathbf{w}) \,.$$

Wie im Beweis von Satz 3.2.21 gilt für $D \in \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$

$$\{\mathbf{M}^t \in D\} = \{\mathbf{M} \in D\}$$

(vgl. (3.2.24)), woraus für $C \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ folgt

$$\int_D q_t(\mathbf{w}, C)\ \mathbf{P}_{\mathbf{M}^t}(\mathrm{d}\mathbf{w}) = \int_D q_t(\mathbf{w}, C)\ \mathbf{Q}(\mathrm{d}\mathbf{w})\,.$$

Also gilt für $C \in \mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ und $D \in \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$ unter Verwendung von (5.3.5)

(5.3.19) $$\int_D q_t(\mathbf{w}, C)\ \mathbf{Q}(\mathrm{d}\mathbf{w}) = \mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{M})}(C \times D) = \int_D q(\mathbf{w}, C)\ \mathbf{Q}(\mathrm{d}\mathbf{w})\,.$$

Es ist nun zu zeigen, daß für alle $C \in \mathfrak{B}_t(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ gilt

(5.3.20) $$q_t(\mathbf{w}, C) = q(\mathbf{w}, C) \quad \text{für} \quad \mathbf{Q}\text{-f. a.} \quad \mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+)\,.$$

Hieraus folgt dann die zu beweisende $\overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}}$-Meßbarkeit von $q(\,\cdot\,, C)$ für C aus $\mathfrak{B}_t(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ (vgl. die Argumentation zum Beweis von Satz 3.2.21).

Um die Beziehung (5.3.20) für jedes $C \in \mathfrak{B}_t(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ zu beweisen, genügt es nach Lemma 15.4 in [2] und mit dem Satz der monotonen Konvergenz zu zeigen, daß für jedes $D \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ gilt

(5.3.21) $$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_D\, q(\cdot\,,\, C)) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_D\, q_t(\cdot\,,\, C))\,.$$

Für ein $C \in \mathfrak{B}_t(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ und $D \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ betrachten wir die linke Seite von (5.3.21). Mit (5.3.5) folgt zunächst

(5.3.22) $$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_D\, q(\cdot\,,\, C)) = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_C(\mathbf{X})\, \mathrm{I}_D(\mathbf{M})) = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_C(\mathbf{X})\, \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_D(\mathbf{M}) \,|\, \mathcal{F}_t^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}}))\,,$$

wobei letztere Gleichheit aus $\{\mathbf{X} \in C\} \in \mathcal{F}_t^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}}$ folgt. Nun betrachten wir das $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}},\, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{N} = (N_s)_{s\geq 0}$ mit

(5.3.23) $$N_s := \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_D(\mathbf{M}) \,|\, \mathcal{F}_s^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}}) \quad (s \geq 0)\,.$$

Für dieses Martingal ist es nicht schwierig, die Gültigkeit von

(5.3.24) $$N_s = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_D \,|\, \mathfrak{B}_s(C(\mathbb{R}_+))) \circ \mathbf{M} \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

für $s \geq 0$ zu zeigen. Gemäß der Voraussetzung ist $\mathbf{N}$ sogar ein $(\mathbb{F}^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}},\, \mathbf{P})$-Martingal, also gilt für $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(N_t \,|\, \mathcal{F}_s^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}}) = N_s \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

Mit (5.3.24) und der $\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$-Meßbarkeit des Markov-Kerns $q_t(\,\cdot\,, C)$ für C aus $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ kann man nun zeigen, daß

(5.3.25) $$\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(N_t \,|\, \mathcal{F}_s^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}}) = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_D(\mathbf{M}) \,|\, \mathcal{F}_s^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}}) \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \quad (0 \leq s \leq t)$$

gilt. Die Gleichheit (5.3.25) zeigt man mit der Definition bedingter Erwartungswerte zunächst für Elemente aus dem Erzeugendensystem für die σ-Algebra $\mathcal{F}_s^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}}$, welches bekanntlich die Gestalt

(5.3.26) $$\{\{(\mathbf{X}, \mathbf{M}) \in A \times B\} \;:\; A \in \mathfrak{B}_s(\overline{C}(\mathbb{R}_+))\,, B \in \mathfrak{B}_s(C(\mathbb{R}_+))\} \cup \mathcal{N}_0^{\mathbf{P}}$$

besitzt. Dabei bezeichnet $\mathcal{N}_0^{\mathbf{P}}$ die Menge der $\mathbf{P}$-Nullmengen aus $\mathcal{F}$. Dieses Erzeugendensystem ist durchschnittsstabil und enthält $\overline{C}(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+)$, woraus dann mit dem

Eindeutigkeitssatz für Maße schließlich die Richtigkeit von (5.3.25) folgt. Damit haben wir gezeigt, daß gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_D(\mathbf{M}) \,|\, \mathcal{F}_t^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}}) = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_D(\mathbf{M}) \,|\, \mathcal{F}_t^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}}) \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \tag{5.3.27}$$

Setzt man nun (5.3.27) in (5.3.22) ein, so erhalten wir unter Beachtung von (5.3.19), (5.3.24) und wegen der $\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))$-Meßbarkeit von $\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_D \,|\, \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+)))$ sowie von $q_t(\,\cdot\,, C)$ die Beziehung

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_D\, q(\,\cdot\,,C)) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(q_t(\,\cdot\,,C)\, \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_D \,|\, \mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+)))) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_D\, q_t(\,\cdot\,,C))\,.$$

Da $D \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ beliebig gewählt war, erhalten wir hieraus die Gültigkeit von (5.3.20) für jedes $C \in \mathfrak{B}_t(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$. Damit ist die Hinlänglichkeit des Satzes bewiesen.

Bleibt uns noch die Notwendigkeit zu beweisen. Dazu sei $(\mathbf{X},\mathbf{M}) \in \mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$, d. h., $(\mathbf{X},\mathbf{M})$ ist eine Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ definiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$. Mit q bezeichnen wir den Markov-Kern aus (5.3.4). Nach Voraussetzung erfüllt q die Meßbarkeitsbedingung (5.3.6). Es ist nun zu zeigen, daß jedes $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal auch ein $(\mathbb{F}^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Hierfür genügt es zu zeigen, daß dies für das $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal $\mathbf{N} = (N_t)_{t\geq 0}$ aus (5.3.23) mit einem beliebigen aber fixierten $D \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ zutrifft. Es ist somit die Martingalgleichung

$$\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(N_t \,|\, \mathcal{F}_s^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}}) = N_s \quad \mathbf{P}\text{-f. s.}$$

für beliebige $0 \leq s \leq t$ zu beweisen. Für $0 \leq s \leq t$ seien zunächst $A \in \mathfrak{B}_s(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ und $B \in \mathfrak{B}_s(C(\mathbb{R}_+))$. Dann gilt unter Verwendung von (5.3.5) sowie nach einer entsprechenden Modifikation von (5.3.24)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_{A\times B}(\mathbf{X},\mathbf{M})\, \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(N_t \,|\, \mathcal{F}_s^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}})) &= \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_{A\times B}(\mathbf{X},\mathbf{M})\, N_t) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_{A\times B}(\mathbf{X},\mathbf{M})\, \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_D \,|\, \overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}}) \circ \mathbf{M}) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_B\, q(\,\cdot\,,A)\, \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_D \,|\, \overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}})) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_B\, \mathrm{I}_D\, q(\,\cdot\,,A))\,.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt wegen $A \in \mathfrak{B}_s(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$ aus (5.3.6) und da $B \in \mathfrak{B}_s(C(\mathbb{R}_+))$ gilt. Auf ganz analoge Weise erhält man ebenfalls

$$\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_{A\times B}(\mathbf{X},\mathbf{M})\, N_s) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{I}_B\, \mathrm{I}_D\, q(\,\cdot\,,A))\,.$$

Zusammengefaßt gilt somit

$$\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_{A\times B}(\mathbf{X},\mathbf{M})\, \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(N_t \,|\, \mathcal{F}_s^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}})) = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\mathrm{I}_{A\times B}(\mathbf{X},\mathbf{M})\, N_s)\,.$$

Da die σ-Algebra $\mathcal{F}_s^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}}$ von dem Mengensystem (5.3.26) erzeugt wird, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße schließlich

$$\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(N_t \,|\, \mathcal{F}_s^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\,\mathbf{P}}) = N_s \quad \mathbf{P}\text{-f. s.} \quad \text{für} \quad 0 \leq s \leq t\,.$$

Also ist der gemäß (5.3.23) für ein $D \in \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ definierte Prozeß $\mathbf{N} = (N_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathbb{F}^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Entsprechend erhält man die gleiche Aussage, wenn man in der Definition des Prozesses $\mathbf{N}$ bzw. von N_t anstelle von $\mathrm{I}_D(\mathbf{M})$ eine integrierbare $\mathcal{F}_\infty^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}}$-meßbare Zufallsgröße wählt. Mit der Rechtsstetigkeit der Filtration $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}}$ folgt dann hieraus, daß jedes gleichgradig-integrierbare $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\,\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal auch ein

$(\mathbb{F}^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist. Ist schließlich $\mathbf{N} = (N_t)_{t\geq 0}$ ein beliebiges $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal, so ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ der gestoppte Prozeß $\mathbf{N}^n = (N_{t\wedge n})_{t\geq 0}$ ein gleichgradig-integrierbares $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal und somit auch ein gleichgradig-integrierbares $(\mathbb{F}^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal. Woraus durch Grenzübergang dann der allgemeine Fall folgt. Damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingung $(\mathbf{X}, \mathbf{M}) \in \mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ gezeigt. □

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß im Satz 5.3.18 jedes $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ein $(\mathbb{F}^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal ist, ist die $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$-Darstellbarkeitseigenschaft des stetigen lokalen $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingals $\mathbf{M}$. Dies folgt unter Beachtung von

$$\mathcal{F}_t^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}_t^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\mathbf{P}} \quad (t \geq 0)$$

und da $\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}$ eine rechtsstetige Filtration ist (vgl. Proposition 1 in [14]) entsprechend dem Beweis von Lemma 3 in [15]. In diesem Fall ist dann nämlich $\mathbf{M}$ sogar ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{(\mathbf{X},\mathbf{M}),\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal. Darüber hinaus ist mit Satz 3.3.19 bekannt, daß die Darstellbarkeitseigenschaft eines stetigen lokalen Martingals eine Verteilungseigenschaft ist. Damit gilt der

Satz 5.3.28 *Seien $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Besitzt $\mathbf{Q}$ die Darstellbarkeitseigenschaft, dann gilt $(\mathbf{X}, \mathbf{M}) \in \mathfrak{L}(\mathbf{Q}, x_0)$ für jede Lösung $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$.*

Als nächstes wollen wir nun eine Version des Satzes von Yamada-Watanabe und dessen Umkehrung für die betrachtete Gleichung (5.3.2) mit einem stetigen lokalen Martingal als treibender Prozeß angeben und verifizieren. Dabei werden die folgenden beiden Sätze von Nutzen sein, welche sich auf Eigenschaften von Lösungen der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung beziehen und wie sich diese auf Lösungen von Gleichung (5.3.2) übertragen.

Satz 5.3.29 *Seien $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist die Lösung von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ pfadweise eindeutig genau dann, wenn die Lösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ pfadweise eindeutig ist.*

Beweis: Auf einen Beweis dieses Satzes sei an dieser Stelle verzichtet, da er sich allein aus der Definition der pfadweisen Eindeutigkeit zusammen mit den Sätzen 4.4.10, 4.4.16 (a) sowie 4.4.25 ergibt. Man beachte, daß, wegen des deterministischen Anfangswertes für die Lösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung, die Voraussetzung von Satz 4.4.10 erfüllt ist. Für den Beweis der Hinlänglichkeit sei angemerkt, daß man zur Anwendung von Satz 4.4.25 zu einen vom Lösungsprozeß von Gleichung (5.3.2) ununterscheidbaren Lösungsprozeß von (5.3.2) übergehen muß, der die beiden Bedingungen in Satz 4.4.16 ohne den Zusatz „f. s.“ erfüllt (siehe auch die getroffene Vereinbarung im Anschluß von Satz 4.4.16). □

Satz 5.3.30 *Seien $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Weiterhin betrachten wir folgende Bedingungen:*

(a) *Es existiert eine starke Lösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ und die Lösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ ist eindeutig in der gemeinsamen Verteilung.*

(b) *Es existiert eine starke Lösung von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ und die Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist eindeutig in der gemeinsamen Verteilung.*

(c) *Es existiert eine Lösung von Gleichung* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *und die Lösung von* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *ist pfadweise eindeutig.*

Dann gelten die Implikationen:

(i) $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$;

(ii) $(c) \Rightarrow (a)$, *falls darüber hinaus* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{a,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$.

Beweis: Zum Beweis der ersten Implikation in (i) erhalten wir zunächst mit Folgerung 4.4.15 aus der Existenz einer starken Lösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ die Existenz einer starken Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$. Darüber hinaus folgt aus Satz 5.3.13 angewandt auf die zu (5.3.2) assoziierte Gleichung, daß die Lösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ pfadweise eindeutig ist. Satz 5.3.29 liefert somit die pfadweise Eindeutigkeit der Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$. Zusammen mit der Existenz einer starken Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ erhalten wir aus Satz 5.3.17 die Existenz einer $\mathbf{Q}$-f. s. eindeutig bestimmten $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$-meßbaren Abbildung $\mathbf{\Psi} : C(\mathbb{R}_+) \to \overline{C}(\mathbb{R}_+)$, so daß

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{M}) \quad \text{f. s.}$$

für jede Lösung $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ gilt. Hieraus folgt aber unmittelbar die Eindeutigkeit in der gemeinsamen Verteilung der Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$ und damit die Richtigkeit der ersten Implikation in (i). Die zweite Implikation in (i) entspricht gerade Satz 5.3.13.

Als nächstes zeigen wir die Implikation in (ii). Aus den Bedingungen in (c) folgt zunächst mit Satz 4.4.25 die Existenz einer Lösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$. Satz 5.3.29 liefert die pfadweise Eindeutigkeit der Lösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$. Wegen $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{a,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und der Existenz einer Lösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung erhalten wir mit Satz 5.3.8 und Satz 5.3.28 angewandt auf die zu (5.3.2) assoziierte Gleichung die zu beweisende Behauptung. □

Damit können wir das Hauptresultat formulieren, was im wesentlichen eine Zusammenfassung der vorangegangenen Sätze beinhaltet.

Theorem 5.3.31 *Seien* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *und* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Weiterhin betrachten wir die Bedingungen:*

(a) *Es existiert eine starke Lösung von Gleichung* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *und die Lösung von Gleichung* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *ist eindeutig in der gemeinsamen Verteilung und damit auch eindeutig in Verteilung.*

(b) *Es existiert eine Lösung von Gleichung* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *und die Lösung von Gleichung* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *ist pfadweise eindeutig.*

Dann gelten die folgenden Implikationen:

(I_1) $(a) \Rightarrow (b)$;

(I_2) $(b) \Rightarrow (a)$, *falls darüber hinaus* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{a,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *gilt.*

Ist unter der Voraussetzung $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{a,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *eine der beiden Bedingungen erfüllt, dann ist jede Lösung von Gleichung* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *eine starke Lösung.*

Beweis: Der Beweis der beiden Implikationen (I_1) und (I_2) folgt unmittelbar aus Satz 5.3.13 und Satz 5.3.30. Der zweite Teil des Theorems entspricht dem zweiten Teil von Satz 5.3.13. □

Abschließend wollen wir hinreichende Bedingungen dafür formulieren, wann pfadweise Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (5.3.2) bzgl. eines stetigen lokalen Martingals gegeben ist. Mit Theorem 5.3.31 erhalten wir damit auch hinreichende Bedingungen für die Existenz starker und in Verteilung eindeutiger Lösung von Gleichung (5.3.2). Gemäß den vorhergehenden Ausführungen und insbesondere wegen Satz 5.3.29 sowie Satz 5.3.30 genügt es, entsprechende Bedingungen für die zu (5.3.2) assoziierte Gleichung zu formulieren. Für den Fall der Brownschen Bewegung als treibender Prozeß sind bereits allgemeine hinreichende Bedingungen für die pfadweise Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (5.3.2) bekannt, welche in den beiden Theoremen 4.41 und 4.48 in [20] zusammengetragen sind. Für den Beweis dieser beiden Theoreme werden im wesentlichen Eigenschaften der lokalen Zeit des Lösungsprozesses verwendet. Darüber hinaus wird in der Literatur bei Beweisen zur pfadweisen Eindeutigkeit oft die Eindeutigkeit in Verteilung vorausgesetzt (vgl. auch Satz 5.3.13). Bevor wir aber analoge Resultate für Gleichungen bzgl. stetiger lokaler Martingale formulieren, wollen wir noch einen nützlichen Satz hinsichtlich der Existenz starker Lösung von Gleichung (5.3.2) beweisen (vgl. auch Folgerung 4.4.15).

Satz 5.3.32 *Seien* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}^{a,p}(C(\mathbb{R}_+))$ *und* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Existiert eine starke Lösung von Gleichung* (5.3.2) *bzgl. des Wiener-Maßes* $\mathbb{W}$, *dann existiert eine starke Lösung der zu* (5.3.2) *assoziierten Gleichung bzgl.* $\mathbf{Q}$.

Beweis: Sei $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales $(\mathbb{F}^{\mathbf{M},\mathbf{P}}, \mathbf{P})$-Martingal über einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, so daß $\mathbf{P_M} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ gilt. Bezeichnet weiterhin $\mathbf{W} = (W_t)_{t\geq 0}$ die zu $\mathbf{M}$ assoziierte $(\mathbb{F}_+^{\mathbf{M},\mathbf{P}} \circ \mathbf{T}, \mathbf{P})$-Brownsche Bewegung und sei $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{B}^*)$ eine beliebige vollständige $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$-Erweiterung.

Laut Voraussetzung existiert nun über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbf{P}})$ mit Filtration $\hat{\mathbb{F}} = (\hat{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ in $\hat{\mathcal{F}}$ eine starke Lösung $(\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{B}})$ von (5.3.2) bzgl. $\mathbb{W}$. Also existiert eine $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$-meßbare Abbildung $\mathbf{\Phi} : C(\mathbb{R}_+) \to \overline{C}(\mathbb{R}_+)$, welche $(\overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbb{W}})_{t\geq 0}$-adaptiert ist, so daß gilt

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{\Phi}(\hat{\mathbf{B}}) \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-f. s.}$$

(vgl. den Beweis von Theorem 2.1 in [3]). Über $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ setzen wir

$$\mathbf{Y}^* := \mathbf{\Phi}(\mathbf{B}^*)\,.$$

Dann gilt $\tilde{\mathbf{P}}_{(\mathbf{Y}^*,\mathbf{B}^*)} = \hat{\mathbf{P}}_{(\hat{\mathbf{Y}},\hat{\mathbf{B}})}$ auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ und wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $(\mathbf{Y}^*, \mathbf{B}^*)$ eine starke Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbb{W}$ ist. Anderenfalls gehe man zu einem von $\mathbf{Y}^*$ ununterscheidbaren Lösungsprozeß über, der zusammen mit $\mathbf{B}^*$ dann eine starke Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbb{W}$ ergibt.

Wegen $\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{\mathbf{M}}} = \mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ erhalten wir zunächst mit Satz 3.3.4 und Satz 3.3.24 angewandt auf die zu $\tilde{\mathbf{M}}$ assoziierte Brownsche Bewegung $\tilde{\mathbf{W}}$, daß $\langle \tilde{M} \rangle_\infty$ eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{W}},\tilde{\mathbf{P}}}$-Stoppzeit ist. Da

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{B}^{*\langle \tilde{M} \rangle_\infty} \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-.f s.} \tag{5.3.33}$$

gilt, ist $\langle \tilde{M} \rangle_\infty$ nach Proposition 5 in [14] sogar eine vorhersagbare $\mathbb{F}^{\mathbf{B}^*,\tilde{\mathbf{P}}}$-Stoppzeit. Als nächstes betrachten wir die endliche $\mathbb{F}^{\mathbf{B}^*,\tilde{\mathbf{P}}}$-Zeittransformation $\mathbf{C} := (t \wedge \langle \tilde{M} \rangle_\infty)_{t\geq 0}$ sowie den zeittransformierten Prozeß $\tilde{\mathbf{Y}} := \mathbf{Y}^* \circ \mathbf{C}$. Für $\tilde{\mathbf{Y}}$ gilt nun auf $\tilde{\Omega}$

$$S_\infty^{\tilde{\mathbf{Y}}} \wedge \langle \tilde{M} \rangle_\infty = S_\infty^{\mathbf{Y}^*} \wedge \langle \tilde{M} \rangle_\infty\,.$$

Somit gilt $\tilde{\mathbf{Y}}^{S^{\tilde{\mathbf{Y}}}_\infty} = \tilde{\mathbf{Y}}$ sowie $\tilde{Y}_0 \in \mathbb{R}$. Mit Folgerung 4.3.26 ist es nun unter Verwendung von (5.3.33) und Satz 2.4.8 (b) nicht schwierig zu zeigen, daß über der Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ das Paar $(\tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{M}})$ eine Lösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Für den Lösungsprozeß $\tilde{\mathbf{Y}}$ gilt nun zum einen

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}^{*\langle \tilde{M} \rangle_\infty}$$

und zum anderen ist dieser $\mathbb{F}^{\mathbf{B}^*, \tilde{\mathbf{P}}} \circ \mathbf{C}$-adaptiert. Aus der $\mathbb{F}^{\mathbf{B}^*, \tilde{\mathbf{P}}}$-Darstellbarkeitseigenschaft der $(\tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$-Brownschen Bewegung $\mathbf{B}^*$ folgt mit Theorem 2 in [14], der $\mathbb{F}^{\mathbf{B}^*, \tilde{\mathbf{P}}}$-Stoppzeit $\langle \tilde{M} \rangle_\infty$ und (5.3.33) durch einfache Rechnung

$$\mathbb{F}^{\mathbf{B}^*, \tilde{\mathbf{P}}} \circ \mathbf{C} = \mathbb{F}^{\mathbf{B}^{*\langle \tilde{M} \rangle_\infty}, \tilde{\mathbf{P}}} = \mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{P}}} .$$

Also ist $\tilde{\mathbf{Y}}$ ein $\mathbb{F}^{\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{P}}}$-adaptierter Prozeß. Hieraus folgt wiederum die Existenz einer $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$-$\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+))$-meßbaren Abbildung $\tilde{\mathbf{\Phi}} : C(\mathbb{R}_+) \to \overline{C}(\mathbb{R}_+)$, so daß gilt

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{\Phi}}(\tilde{\mathbf{W}}) \quad \tilde{\mathbf{P}}\text{-f. s.}$$

Insbesondere ist $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ an die Filtration $(\overline{\mathfrak{B}_t(C(\mathbb{R}_+))}^{\mathbf{Q}})_{t \geq 0}$ adaptiert. Nun setzen wir über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

$$\mathbf{Y} := \tilde{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{W}) .$$

Wegen $\mathbf{P}_{(\mathbf{Y},\mathbf{W})} = \tilde{\mathbf{P}}_{(\tilde{\mathbf{Y}},\tilde{\mathbf{W}})}$ auf $\mathfrak{B}(\overline{C}(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ und $\mathbf{P}_{Y_0} = \tilde{\mathbf{P}}_{Y_0^*} = \delta_{x_0}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ erhalten wir mit der üblichen Argumentation, daß$(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ ebenfalls eine Lösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. Darüber hinaus ist $\mathbf{Y}$ an die Filtration $\mathbb{F}^{M_0 + \mathbf{W}, \mathbf{P}}$ adaptiert. Insgesamt ist $(\mathbf{Y}, \mathbf{M})$ damit eine starke Lösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung bzgl. $\mathbf{Q}$. □

Bemerkung 5.3.34 Mit Folgerung 4.4.15 erhalten wir unter der Voraussetzung des vorhergehenden Satzes sogar die Existenz einer starken Lösung von (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$.

Wie die vorhergehenden Sätze, insbesondere Satz 5.3.29, Theorem 5.3.31 und Satz 5.3.32 zeigen, genügt es Bedingungen zu formulieren, welche die Existenz starker und pfadweise eindeutiger Lösungen der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung garantieren. Da nun der treibende Prozeß der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung eine gestoppte Brownsche Bewegung ist, lassen sich die Beweise von Theorem 4.41 sowie Theorem 4.48 in [20] problemlos auch auf diesen Fall übertragen. Im Falle einer Brownschen Bewegung als treibender Prozeß spielt bei den Beweisen der zuvor genannten Theoreme die Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung eine wichtige Rolle. Daher müssen wir zusätzliche Bedingungen formulieren, die die Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung bzw. der Fundamentallösung der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung gewährleisten. Wie wir bereits wissen, ist die Purheit des treibenden Prozesses der zu (5.3.2) assoziierten Gleichung hierfür eine hinreichende Bedingung.

Theorem 5.3.35 *Es seien* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{a,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *und* $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Angenommen es existieren zwei meßbare Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus E_b \to [0, +\infty]$ *und* $h : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$, *die folgende Bedingungen erfüllen:*

(i) $f \cdot b^{-2}$ *ist lokal integrierbar über* $\mathbb{R} \setminus E_b$.

(ii) Für jede Umgebung U von Null ist

$$\int_U h^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = +\infty\,.$$

(iii) Es existiert eine positive reelle Zahl $c > 0$, so daß gilt

$$(b(x+y) - b(x))^2 \leq f(x) \cdot h(y)\,, \quad x\,, x+y \in \mathbb{R} \setminus E_b\,, \quad y \in\,]-c, c[\,.$$

Dann ist die Fundamentallösung von Gleichung (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *pfadweise eindeutig. Gilt darüber hinaus $N_b \subseteq E_b$, dann ist die Lösung von Gleichung* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *pfadweise eindeutig.*

(2) Ist zusätzlich zu den Bedingungen in (1) die Bedingung $E_b \subseteq N_b$ erfüllt, dann ist die Fundamentallösung von Gleichung (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *eine starke Lösung. Darüber hinaus existiert für jedes stetige lokale $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Verteilung $\mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ eine pfadweise eindeutige starke Fundamentallösung von Gleichung* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.*

Beweis: Für den Beweis des ersten Teils dieses Theorems vergleiche man den Beweis von Theorem 4.41 in [20]. Hierbei hat man nur die Brownsche Bewegung durch die assoziierte Brownsche Bewegung zu ersetzen. Ansonsten verläuft der Beweis ganz analog wie im Fall der Brownschen Bewegung als treibender Prozeß. Mit Satz 5.3.29 folgt dann die pfadweise Eindeutigkeit der Lösung (bzw. Fundamentallösung) von Gleichung (5.3.2) bzgl. $\mathbf{Q}$. Der zweite Teil dieses Theorems folgt aus Satz 5.3.30. □

Theorem 5.3.36 *Es seien $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{a,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und $x_0 \in \mathbb{R}$.*

(1) Angenommen es existieren zwei meßbare Funktionen $g : \mathbb{R} \setminus E_b \to [0, +\infty]$ und $h : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$, die folgende Bedingungen erfüllen:

(i) g ist auf $\mathbb{R}$ monoton wachsend.

(ii) Für jede Umgebung U von Null ist

$$\int_U h^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = +\infty\,.$$

(iii) Es existiert eine positive reelle Zahl $c > 0$, so daß gilt

$$(b(x+y) - b(x))^2 \leq h(x) \frac{|g(x+y) - g(x)|}{|y|}\,, \quad x\,, x+y \in \mathbb{R} \setminus E_b\,, \quad y \in\,]-c, c[\,.$$

(iv) Für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R} \setminus E_b$ ist $\inf_{x \in K} b(x) > 0\,.$

Dann ist die Lösung von Gleichung (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *pfadweise eindeutig.*

(2) Gilt zusätzlich zu den Bedingungen in (1) $E_b \subseteq N_b$, dann ist jede Lösung von Gleichung (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *eine starke Lösung und für jedes stetige lokale $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Verteilung $\mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ existiert eine pfadweise eindeutige starke Lösung von Gleichung* (5.3.2) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.*

Beweis: Vergleiche den Beweis von Theorem 4.48 in [20] sowie die Ausführungen zum Beweis von Theorem 5.3.35. Die Bedingung (iv) in (1) garantiert, daß jede Lösung von Gleichung (5.3.2) eine Fundamentallösung ist. □

5.4 Gleichungen mit gewöhnlicher Drift

In dem nun letzten Abschnitt dieser Arbeit wollen wir die wichtigsten Ergebnisse hinsichtlich der Lösung stochastischer Differentialgleichungen mit gewöhnlicher Drift zusammenfassen. Ausgangspunkt hierfür ist die Gleichung

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}M_s \tag{5.4.1}$$

mit zwei Borel-meßbaren Funktionen $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Im Abschnitt 4.1 haben wir gesehen, wie man eine stochastische Differentialgleichung mit gewöhnlicher Drift aus einer stochastischen Differentialgleichung mit verallgemeinerter Drift ableiten kann und umgekehrt. Für das Weitere treffen wir folgende Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} &(i) \quad E_b \subseteq N_a\,. \\ &(ii) \quad a \cdot b^{-2} \text{ ist lokal integrierbar über } \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt nun folgendes Theorem für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (5.4.1) (vgl. Theorem 4.53 in [20]). Dabei wollen wir ohne Einschränkung den trivialen Fall eines treibenden Prozesses für Gleichung (5.4.1) ausschließen. Weiterhin sei bemerkt, daß der Begriff der Lösung (bzw. Fundamentallösung) von Gleichung (5.4.1) im Sinne von Definition 4.1.3 (bzw. Definition 4.3.3) entsprechend zu verstehen ist.

Theorem 5.4.2 *Sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ *mit* $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty > 0\}) > 0$.

(a) Für jede Startverteilung auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *existiert eine Fundamentallösung* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *von Gleichung* (5.4.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit*

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^{D^{\mathbf{X}}_{E_b}} \quad \text{f. s.} \tag{5.4.3}$$

genau dann, wenn $E_b \subseteq N_b$ *gilt. Ist darüber hinaus* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{0,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$, *so ist für jede Startverteilung auf* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *die Fundamentallösung* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *von* (5.4.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *mit* (5.4.3) *eindeutig in Verteilung.*

(b) Angenommen es gelte $N_b \subseteq N_a$. *Für jede Startverteilung auf* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *existiert eine Lösung von Gleichung* (5.4.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *genau dann, wenn die Bedingung* $E_b \subseteq N_b$ *erfüllt ist. Ist darüber hinaus* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{0,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$, *so existiert für jede Startverteilung auf* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *eine Lösung von Gleichung* (5.4.1) *bzgl.* $\mathbf{Q}$ *und die Lösung ist eindeutig in Verteilung genau dann, wenn* $E_b = N_b$ *gilt.*

Beweis: Zum Beweis dieses Theorems vergleiche man den Beweis von Theorem 4.53 in [20].

Für jedes $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mit kompaktem Abschluß in $\mathbb{R}$ definieren wir zunächst folgende Mengenfunktion ν mit

$$\nu(A) := \int_A a(x)\, b^{-2}(x)\, \ell(\mathrm{d}x)\,.$$

Diese Definition macht wegen (ii) Sinn, und wir erhalten hierdurch für jedes $N \geq 1$ ein endliches signiertes Maß auf $\mathfrak{B}([-N, N])$, welches die Sprungbedingung (4.3.2) erfüllt.

Unter der Bedingung $N_b \subseteq N_a$ in (b) ist, wie wir im Abschnitt 4.1 gezeigt haben, jede Lösung von (5.4.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ eine Lösung von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ und umgekehrt. Mit der Voraussetzung (i) erhalten wir mit den gleichen Überlegungen wie im Abschnitt 4.1, daß $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ mit der Eigenschaft (5.4.3) genau dann eine Fundamentallösung von Gleichung (5.4.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist, wenn $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ eine Fundamentallösung von (4.1.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ mit (5.4.3) ist. Demzufolge erhalten wir die Richtigkeit der Existenzaussagen in (a) und (b) aus Theorem 4.3.31. Mit Theorem 5.2.22 und Theorem 5.2.31 folgen dann auch die Eindeutigkeitsaussagen in (a) und (b). $\square$

Einige hinreichende Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (5.4.1) gibt die

Folgerung 5.4.4 *Sei $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ mit $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty > 0\}) > 0$. Angenommen es gelte $N_b \subseteq N_a$. Dann sind die folgenden Bedingungen hinreichend für die Existenz einer Lösung von Gleichung* (5.4.1) *bzgl. $\mathbf{Q}$ für jede Startverteilung auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$:*

(a) a ist lokal beschränkt ℓ-fast überall auf $\mathbb{R}$ und b^{-2} ist lokal integrierbar auf $\mathbb{R}$.

(b) a ist lokal integrierbar auf $\mathbb{R}$ und b^{-1} ist lokal beschränkt ℓ-fast überall auf $\mathbb{R}$.

(c) Es existieren $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so daß a^p und b^{-2q} lokal integrierbar auf $\mathbb{R}$ sind.

Gilt darüber hinaus $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{0,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ und $N_b = \emptyset$, so ist für jede Startverteilung auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ die Lösung von Gleichung (5.4.1) *bzgl. $\mathbf{Q}$ eindeutig in Verteilung.*

Man beachte, daß unter den Voraussetzungen von Folgerung 5.4.4 die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind, da hier $E_b = \emptyset$ gilt. Speziell existiert für eine beliebige Startverteilung auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ eine Lösung von Gleichung (5.4.1) bzgl. $\mathbf{Q}$, welche eindeutig in Verteilung ist, falls $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{0,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$, a lokal integrierbar und b^{-1} stetig ist.

Hinsichtlich der pfadweisen Eindeutigkeit und Existenz starker Lösung von Gleichung (5.4.1) haben wir folgendes Resultat, wobei wir auch hier den zufälligen Anfangswert X_0 in (5.4.1) durch einen deterministischen Wert $x_0 \in \mathbb{R}$ ersetzen wollen.

Theorem 5.4.5 *Seien $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{a,p}_{loc}(C(\mathbb{R}_+))$ mit $\mathbf{Q}(\{\langle Z\rangle_\infty > 0\}) > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$.*

(a) Angenommen die Bedingungen (i) - (iii) von Theorem 5.3.35 (1) sind erfüllt. Dann ist die Fundamentallösung von Gleichung (5.4.1) *bzgl. $\mathbf{Q}$ mit der Eigenschaft* (5.4.3) *pfadweise eindeutig. Gilt darüber hinaus $E_b \subseteq N_b$, dann ist jede Fundamentallöung von* (5.4.1) *bzgl. $\mathbf{Q}$ mit der Eigenschaft* (5.4.3) *eine starke Lösung. Desweiteren existiert für jedes stetige lokale $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$, welches die Verteilung $\mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ besitzt, eine pfadweise eindeutige starke Fundamentallösung von Gleichung* (5.4.1) *bzgl. $\mathbf{Q}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit* (5.4.3).

(b) Angenommen eine der beiden folgenden Bedingungen sind erfüllt:

(i) $N_b \subseteq E_b$ und es gelten (i) - (iii) von Theorem 5.3.35 (1).

(ii) Es gelten (i) - (v) von Theorem 5.3.36 (1).

Dann ist die Lösung von Gleichung (5.4.1) *bzgl. $\mathbf{Q}$ mit der Eigenschaft* (5.4.3) *pfadweise eindeutig. Gilt darüber hinaus $E_b \subseteq N_b$, dann ist jede Lösung von Gleichung* (5.4.1) *bzgl. $\mathbf{Q}$ mit* (5.4.3) *eine starke Lösung. Desweiteren existiert für jedes stetige lokale $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-Martingal über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$, welches die Verteilung $\mathbf{Q}$ auf $\mathfrak{B}(C(\mathbb{R}_+))$ besitzt, eine pfadweise eindeutige starke Lösung von Gleichung* (5.4.1) *bzgl. $\mathbf{Q}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit* (5.4.3).

Beweis: Der Beweis dieses Theorems folgt analog dem Beweis von Theorem 5.4.2 aus Theorem 5.3.35 und Theorem 5.3.36, wobei man zu beachten hat, daß unter den Bedingungen (i) und (ii) in (b) jede Lösung von (5.4.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ eine Fundamentallöung von (5.4.1) bzgl. $\mathbf{Q}$ ist. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] J. Azéma, C. Rainer, M. Yor: *Une propriété des martingales pure.* Lecture Notes in Mathematics **1626**, 243–254, Springer-Verlag, Berlin 1996

[2] H. Bauer: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Walter de Gruyter, Berlin 1991

[3] A. S. Cherny: *On the strong and weak solutions of stochastic differential equations governing Bessel processes.* Stochastics and Stochastics Reports **70**, 213–219 (2000)

[4] A. S. Cherny: *On the uniqueness in law and the pathwise uniqueness for stochastic differential equations.* Theory of Probability and its Applications **46**, 406–419 (2001)

[5] K. L. Chung, R. J Williams: *Introduction to stochastic integration.* Progress in Probability and Statistics **4**, Birkhäuser, Boston 1983

[6] K. E. Dambis: *On the decomposition of continuous martingales.* Theory of Probability and its Applications **10**, 401–410 (1965)

[7] C. Dellacherie: *Capacités et processus stochastique.* Springer-Verlag, Berlin 1972

[8] C. Dellacherie, P. A. Meyer: *Probabilities and potential.* Mathematics studies **29**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1978

[9] L. E. Dubins, G. Schwarz: *On continuous martingales.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **53**, 913–916 (1965)

[10] J. Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer-Lehrbuch, Berlin 1999

[11] H. J. Engelbert: *On the theorem of T. Yamada and S. Watanabe.* Stochastics and Stochastics Reports **36**, 205–216 (1991)

[12] H. J. Engelbert: *Existence and non-existence of solutions of one-dimensional stochastic equations.* Probability and Mathematical Statistics **20**, 343–358 (2000)

[13] H. J. Engelbert: *On uniqueness of solutions to stochastic equations: a counter-example.* The Annals of Probability **30**, 1039–1043 (2002)

[14] H. J. Engelbert, J. Hess: *Integral representation with respect to stopped continuous local martingales.* Stochastics **4**, 121–142 (1980)

[15] H. J. Engelbert, J. Hess: *Stochastic integrals of continuous local martingales, I.* Mathematische Nachrichten **97**, 325–343, (1980)

[16] H. J. Engelbert, J. Hess: *Stochastic integrals of continuous local martingales, II.* Mathematische Nachrichten **100**, 249–269, (1981)

[17] H. J. Engelbert, W. Schmidt: *On the behaviour of certain functionals of the Wiener process and applications to stochastic differential equations.* Lecture Notes in Control and Information Sciences **36**, 47–55, Springer-Verlag, Berlin 1981

[18] H. J. Engelbert, W. Schmidt: *On solutions of one-dimensional stochastic differential equations without drift.* Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **68**, 287–314 (1984)

[19] H. J. Engelbert, W. Schmidt: *On one-dimensional stochastic differential equations with generalized drift.* Lecture Notes in Control and Information Sciences **69**, 143–155, Springer-Verlag, Berlin 1985

[20] H. J. Engelbert, W. Schmidt: *Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations (Part III).* Mathematische Nachrichten **151**, 149–197 (1991)

[21] W. Hackenbroch, A. Thalmaier: *Stochastische Analysis – Eine Einführung in die Theorie der stetigen Semimartingale.* B. G. Teubner, Stuttgart 1994

[22] J. M. Harrison, L. A. Shepp: *On skew Brownian motion.* The Annals of Probability **9**, 309–313 (1981)

[23] D. N. Hoover: *A characterization of adapted distribution.* The Annals of Probability **15**, 1600–1611 (1987)

[24] N. Ikeda, S. Watanabe: *Stochastic differential equations and diffusion processes.* North-Holland mathematical library **24**, Amsterdam 1989

[25] J. Jacod: *Calcul stochastique et problèmes de martingales.* Lecture Notes in Mathematics **714**, Springer-Verlag, Berlin 1979

[26] J. Jacod: *Weak and strong solutions of stochastic differential equations.* Stochastics **3**, 171–191 (1980)

[27] J. Jacod, J. Mémin: *Weak and strong solutions of stochastic differential equations: existence and stability.* Lecture Notes in Mathematics **851**, 169–212, Springer-Verlag, Berlin 1981

[28] J. Jacod, A. N. Shiryaev: *Limit theorems for stochastic processes.* Springer-Verlag, Berlin 1987

[29] O. Kallenberg: *Foundations of modern probability.* Springer-Verlag, New York 1997

[30] N. Kazamaki: *Changes of time, stochastic integrals and weak martingales.* Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **22**, 25–32 (1972)

[31] H. Kunita, S. Watanabe: *On square integrable martingales.* Nagoya Mathematical Journal **30**, 209–245 (1967)

[32] J. F. Le Gall: *One-dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process.* Lecture Notes in Mathematics **1095**, 51–82, Springer-Verlag, Berlin 1984

[33] B. Maisonneuve: *Une mise au point sur les martingales locales continues définies sur un intervalle stochastique.* Lecture Notes in Mathematics **581**, 435–445, Springer-Verlag, Berlin 1977

[34] P. Raupach: *Eindimensionale stochastische Differentialgleichungen ohne Drift mit zeitabhängigen Koeffizienten.* Dissertation, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 1996

[35] D. Revuz, M. Yor: *Continuous martingales and Brownian motion. 2nd ed.* Springer, Berlin 1994

[36] A. Rozkosz, L. Słomiński: *On existence and stability of weak solutions of multidimensional stochastic differential equations with measurable coefficients.* Stochastic Processes and their Applications **37**, 187–197 (1991)

[37] A. Rozkosz, L. Słomiński: *On existence and uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations driven by continuous local martingales.* Stochastic Processes and Related Topics **61**, 129–135 (1991)

[38] M. Rutkowski: *On solutions of stochastic differential equations with drift.* Probability Theory and Related Fields **85**, 387–402 (1990)

[39] W. Schmidt: *On stochastic differential equations with reflecting barriers.* Mathematische Nachrichten **142**, 135–148 (1989)

[40] H. von Weizsäcker, G. Winkler: *Stochastic integrals: an introduction.* Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg-Verlag, Braunschweig 1990

[41] J. Yeh: *Martingales and stochastic analysis.* Series on Multivariate Analysis **1**, World Scientific, Singapore 1995

[42] Ch. Yoeurp: *Décomposition de martingales locales et formules exponentielles.* Lecture Notes in Mathematics **511**, 432–480, Springer-Verlag, Berlin 1976

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Jena,

Für Ingrid